UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp, Michael Hahn

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Informatiker 2

Sommersemester 2014
Die Lösungen des Übungsblattes sind am 04.06.2014 **vor der Vorlesung** abzugeben.

Blatt 6 28. Mai 2014

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & -1 \\ 1 & 1 & -11 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Aufgabe 2 (Determinante)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien ferner $x, a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \Bbbk$. Zeigen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} x & -1 & & & 0 \\ 0 & x & -1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & x + a_{n-1} \end{pmatrix} = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Aufgabe 3 (Isomorphismen)**.** Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die lineare Abbildung, die durch unten stehende Matrix $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ definiert wird, ein Isomorphismus?

$$A = \begin{pmatrix} t & 1 & \frac{2}{3} & \frac{3}{7}t & \frac{5}{2}t & -3 \\ 1 & 2 & -3 & -7t & 8 & -2t \\ 0 & 0 & \frac{3}{7} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3t & 2 & \frac{1}{3} & t \\ 0 & 0 & 3 & 2t & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (Determinanten und Geometrie)**.**
Gegeben seien n Punkte $p_1 = (p_{11}, \dots, p_{1n}), \dots, p_n = (p_{n1}, \dots, p_{nn}) \in \mathbb{R}^n$, welche eine Hyperebene

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \lambda_1(p_1 - p_n) + \cdots + \lambda_{n-1}(p_{n-1} - p_n) + p_n,\ \text{für } \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}\}$$

aufspannen, d.h. die $(n-1)$ Differenzvektoren $p_1 - p_n, p_2 - p_n, \dots, p_{n-1} - p_n$ sind linear unabhängig. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\widetilde{H} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & 1 \\ p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} & 1 \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} & 1 \end{pmatrix} = 0\}$$

die Hyperebene H definiert. Hierzu müssen Sie insbesondere zeigen, dass $\widetilde{H}$ eine echte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist.