UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp, Michael Hahn

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Informatiker 2

Sommersemester 2014
Die Lösungen des Übungsblattes sind am 11.06.2014 **vor der Vorlesung** abzugeben.

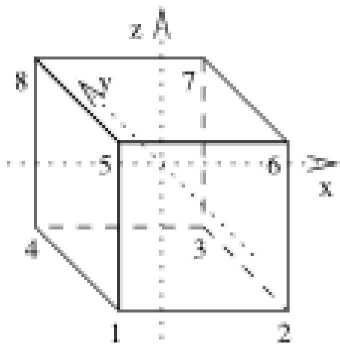
Blatt 7 04. Juni 2014

Aufgabe 1 (Determinante eines Endomorphismus)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren:

$$f_n \colon \mathbb{R}[x]_{\le n} \to \mathbb{R}[x]_{\le n}, \quad p \mapsto (p \cdot x)',$$

wobei q' die Ableitung eines Polynoms $q \in \mathbb{R}[x]$ ist. Zeigen Sie, dass f_n ein Endomorphismus ist. Berechnen Sie die Determinante von f_5.

Aufgabe 2 (Eigenwerte und Eigenräume)**.**
Wir betrachten den Würfel W mit Ecken $(\pm 1, \pm 1, \pm 1) \in \mathbb{R}^3$, dessen Schwerpunkt also im Ursprung des Koordinatensystems liegt:



Berechnen Sie Matrixdarstellungen der folgenden linearen Abbildungen, die den Würfel auf sich selbst abbilden, und berechnen Sie Eigenwerte und Eigenräume dieser Matrizen:

(a) $D :=$ Drehung um $180°$ um die Achse, die die Mittelpunkte der Strecken 15 und 37 verbindet.
(b) $S :=$ Spiegelung an der Ebene, die durch die Punkte 2, 4, 6, 8 geht.
(c) Die Abbildung $D \circ S$ (eine sogenannte Drehspiegelung).

Aufgabe 3 (Lineare Rekursion)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Es sei nun $x_0 = a$, $x_1 = b$ und $x_n = \frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}$ für $n \ge 2$.

(a) Schreiben Sie die Rekursion in der Form $y_n = A \cdot y_{n-1}$, wobei A eine 2×2 - Matrix ist und $y_i = \begin{pmatrix} x_i \\ x_{i-1} \end{pmatrix}$.
(b) Finden Sie eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix S, so dass $A = SDS^{-1}$.
(c) Bestimmen Sie: $\lim_{n\to\infty} S^{-1}A^nS$.
(d) Leiten Sie daraus $\lim_{n\to\infty} A^n$ und $\lim_{n\to\infty} x_n$ ab.

Aufgabe 4 (Potenzen von Matrizen).

(a) Berechnen Sie M^2, M^3, M^4 für die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Was sind die Eigenwerte und Eigenräume von M?

(b) Sei $A \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie mit den in der Vorlesung bewiesenen Sätzen, $\chi_A(t) = (-1)^n \cdot t^n$ genau dann, wenn A konjugiert zu einer strikten oberen Dreiecksmatrix B ist. Eine Matrix $B = (b_{ij})$ heißt strikt obere Dreiecksmatrix, falls $b_{ij} = 0$ für $i \leq j$.