UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp, Michael Hahn

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Informatiker 2

Sommersemester 2014
Die Lösungen des Übungsblattes sind am 18.06.2014 **vor der Vorlesung** abzugeben.

Blatt 8 11. Juni 2014

Aufgabe 1 (Relationen zwischen Matrizen). (a) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: $A^3 - 6A^2 + 10A - 4E_3 = 0$, wobei $E_3 \in K^{3\times 3}$ die Einheitsmatrix ist.

(b) Sei nun $A \in K^{n\times n}$ beliebig. Zeigen Sie: Es existiert ein Polynom $P(t) = b_r t^r + \cdots + b_1 t + b_0 \in K[t]$, so dass: $b_r A^r + \cdots + b_1 A + b_0 E_n = 0$, wobei $E_n \in K^{n\times n}$ die Einheitsmatrix ist.

Aufgabe 2 (Kegelschnitte). Stellen Sie fest, zu welchem Typ die folgenden Kegelschnitte (d.h. Quadriken in der Ebene $\mathbb{R}^2$, in zwei Variablen) gehören und zeichnen Sie diese, gemeinsam mit ihren Hauptachsen, jeweils in das gegebene Koordinatensystem ein:

(a) $-8x^2 + 12xy - 6x + 8y^2 - 18y + 8 = 0$,
(b) $5x^2 - 8xy + 2x + 5y^2 + 2y + 1 = 0$.

Aufgabe 3 (Quadriken im $\mathbb{R}^3$). Stellen Sie fest, zu welchem Typ die folgende Quadrik im $\mathbb{R}^3$ gehört und zeichnen Sie sie, gemeinsam mit ihren Hauptachsen, in das gegebene Koordinatensystem ein:

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 - 2xz + 2z^2 - 2yz - 1 = 0.$$

Aufgabe 4 (Drei Windschiefe Geraden definieren eine Quadrik). Es seien 3 paarweise windschiefe Geraden l_1, l_2, l_3 im $\mathbb{R}^3$ gegeben. Zeigen Sie: Es gibt genau eine Quadrik, die diese 3 Geraden enthält; diese ist ein einschaliges Hyperboloid oder ein hyperbolischer Paraboloid. Wie erhält man alle Geraden aus den gegebenen dreien geometrisch?
Hinweise: Zur Existenz der Quadrik kann man ausnutzen, dass der Raum $\mathbb{R}[x,y,z]_{\leq 2}$ der Quadriken im $\mathbb{R}^3$ 10-dimensional ist. Wie viele lineare Bedingungen an die Koeffizienten einer Quadrik sind es, eine vorgegebene Gerade zu enthalten?
Um alle Geraden zu finden, betrachten Sie zunächst eine Ebene E, die von l_1 und einem Punkt $p \in l_2$ aufgespannt wird. E schneidet l_3 in einem Punkt q. Nun geht durch p und q eine Gerade. In wievielen Punkten kann eine Gerade eine Quadrik im $\mathbb{R}^3$ maximal schneiden, ohne in ihr zu liegen?