letzte Vorlesung: Satz (Ergodensatz)

Sei $M \in \mathbb{R}^{k \times k}$ eine stochastische Matrix.

a) Dann existiert stets $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} M^n = Q$

und es gilt $Q^2 = Q = MQ = QM$

b) $s := \operatorname{Rang} Q =$ Vielfachheit des EW $\lambda = 1$ und Q beschreibt Projektion auf $\operatorname{Eig}(M, 1)$

c) Ist $\lambda = 1$ der einzige EW mit $|\lambda| = 1$, dann gilt $Q = \lim_{n\to\infty} M^n$

d) Ist $\lambda = 1$ der einzige EW mit $|\lambda| = 1$ und es gilt $\dim \operatorname{Eig}(M, 1) = 1$. Dann ist $Q = \begin{pmatrix} z_1 & \cdots & z_1 \\ \vdots & & \vdots \\ z_k & \cdots & z_k \end{pmatrix}$

mit $z \in [0,1]^k$, $\sum_i z_i = 1$ der eindeutig bestimmte Gleichgewichtszustand, d.h. $Mz = z$. $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \end{pmatrix}$

z = Eigenvektor zum Eigenwert 1

Beweis:

a) Sei $J = T M T^{-1}$ die Jordanform von M.
Es gilt $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} J^i = T \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} M^i \right) T^{-1}$
Wir untersuchen daher die Folge $y_n = \sum_{i=0}^{n-1} J^i$.
Sei $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$ ein Jordankästchen. Wegen der Struktur von J genügt es, die Konvergenz von $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} B^i$ zu untersuchen.

Da M stochastisch ist, $\Rightarrow |\lambda| \leq 1$

i) $|\lambda| = 1 \rightsquigarrow$ Dann ist nach Satz (letzte Vorlesung) $B = (\lambda)$ eine 1×1 Matrix.

* $\lambda = 1 \rightsquigarrow \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\lambda = 1$

* $|\lambda|=1, \lambda\neq 1 \rightsquigarrow \underbrace{\lambda^m = 1}_{\text{Einheitswurzel}} \Rightarrow \sum_{i=0}^{m-1}\lambda^i = \frac{\lambda^m-1}{\lambda-1} = 0$

also ist $\left|\frac1n \sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i\right| = \frac1n \left|\sum_{i=n-m}^{n-1}\lambda^i\right|$

$\le \frac1n \sum_{i=n-m}^{n-1}\underbrace{|\lambda|^i}_{1} = \frac{m-1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

ii) Ist $|\lambda|<1$ und $B = \begin{pmatrix}\lambda & 1 & \\ & \ddots & 1\\ 0 & & \lambda\end{pmatrix}\in \mathbb{C}^{r\times r}$, so ist $B^i = \left(E_r + \begin{pmatrix}0&1&\\&\ddots&\\&&0\end{pmatrix}\right)^i$

NR
$\begin{pmatrix}0&1&\\&\ddots&\\&&0\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}0&0&1\\&&\ddots\\&&0\end{pmatrix}$
usw.
$\begin{pmatrix}0&1&\\&\ddots&\\&&0\end{pmatrix}^{r-1} = \begin{pmatrix}0&\cdots&1\\&&\\0&&0\end{pmatrix}$

$= \lambda^i E_r + \lambda^{i-1}\binom{i}{1}\begin{pmatrix}0&1&\\&\ddots&\\&&0\end{pmatrix}^1 + \lambda^{i-2}\binom{i}{2}\begin{pmatrix}0&1&\\&\ddots&\\&&0\end{pmatrix}^2 + \dots +$

$\lambda^{i-r}\binom{i}{r}\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&\\&\ddots&\\&&0\end{pmatrix}^r}_{0} + \dots$

$= \begin{pmatrix}\lambda^i & \lambda^{i-1}\binom{i}{1} & \cdots & \binom{i}{r-1}\lambda^{i-r+1}\\ & \ddots & & \\ 0 & & & \lambda^i\end{pmatrix}$

Nun gilt für einen Eintrag auf der i-ten Nebendiagonalen:

$\left|\sum_{i=0}^{n-1}\binom{i}{j}\lambda^{i-j}\right| \le \sum_{i=0}^{n-1}\binom{i}{j}|\lambda|^{i-j} \le \sum_{i=0}^{\infty}\binom{i}{j}|\lambda|^{i-j} \; *$

Da $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\dots+x^\ell$ ist $\left(\frac{d}{dx}\right)^j\left(\frac{1}{1-x}\right) = \dots + \ell(\ell-1)\dots(\ell-j-1)x^{\ell-j}\dots$

* $\left[\frac{1}{j!}\left(\frac{d}{dx}\right)^j\left(\frac{1}{1-x}\right)\right]_{x=|\lambda|}$

$f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^j\left(\frac{1}{1-x}\right)$

* $\frac1n \underbrace{f(|\lambda|)}_{\text{beschränkt}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Insbesondere gilt damit auch: $\frac1n\sum_{i=1}^{n-1}B^i \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Also ist $\lim_{n\to\infty}\frac1n\sum_{i=0}^{n-1}J^i = \left(\begin{array}{c|c}E_s&0\\\hline 0&0\end{array}\right)$, $s = \dim(\mathcal{A},1)$

$\Rightarrow Q = T^{-1}\left(\begin{array}{c|c}E_s&0\\\hline 0&0\end{array}\right)T$

$Q^2 = \underbrace{\left(T^{-1}\left(\begin{array}{c|c}E_s&0\\\hline 0&0\end{array}\right)\underbrace{T\right)\left(T^{-1}}_{\mathrm{id}}\left(\begin{array}{c|c}E_s&0\\\hline 0&0\end{array}\right)}_{\left(\begin{array}{c|c}E_s&0\\\hline 0&0\end{array}\right)}T\right) = Q$

* $Q\mathcal{A} = Q$ ($\mathcal{A}Q = Q$ analog)

$Q\mathcal{A} = \left(\lim_{n\to\infty}\frac1n\sum_{i=0}^{n-1}\mathcal{A}^i\right)\mathcal{A} = \lim_{n\to\infty}\frac1n\sum_{i=0}^{n-1}\mathcal{A}^{i+1}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac1n\left(\mathcal{A} + \sum_{i=0}^{n-1}\mathcal{A}^{i+1}\right)$ $\quad \frac1n\mathcal{A}\xrightarrow{n\to\infty}0$

$= Q$

zu b) rang $Q = \dim(\mathrm{Eig}(\mathcal{A},1))$ ist klar

Projektionsaussage (Bild $Q = \mathrm{Eig}(\mathcal{A},1)$ und $Q|_{\mathrm{Eig}(\mathcal{A},1)} = \mathrm{id}_{\mathrm{Eig}(\mathcal{A},1)}$)

$\mathcal{A}Q = Q \Rightarrow$ Spalten von Q sind EV zum EW 1

$\Rightarrow$ Bild von $Q \subset \mathrm{Eig}(\mathcal{A},1)$

Da $\operatorname{rang} Q \overset{\text{def}}{=} \dim \operatorname{Bild} Q = \dim \operatorname{Eig}(\mathfrak{M}, 1)$
folgt $\operatorname{Bild} = \operatorname{Eig}(\mathfrak{M}, 1)$

$\operatorname{Eig}(\mathfrak{M}, 1)$ wird aufgespannt von den ersten s Spalten von T^{-1}.

Sei x_i die i-te Spalte von T^{-1}. Dann gilt

$T x_i = e_i$

$$\overset{i \le s}{\Longrightarrow} \quad Q x_i = T^{-1} \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} E_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \underbrace{T x_i}_{e_i}}_{e_i} = x_i$$

zu c) Für λ mit $|\lambda| < 1$ und Jordanblock $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$ hatten wir bereits gesehen, dass $B^n \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

$$\begin{pmatrix} \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \cdots \\ & \ddots & \\ & & \lambda^n \end{pmatrix}$$

Da $\lambda = 1$ der einzige EW mit $|\lambda| = 1$
(und es gilt $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} = \lambda^n = 1$
folgt schon $Q = \lim \mathfrak{M}^n$.

zu d) Da $\mathfrak{M}$ stochastisch $\Rightarrow \mathfrak{M}^n, \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathfrak{M}^n$ und der Grenzwert Q sind ebenfalls stochastisch.

Ist nun λ der einzige EW mit $|\lambda| = 1$ und es gilt zudem $\dim \operatorname{Eig}(\mathfrak{M}, 1) = 1$, dann sind wegen $Q\mathfrak{M} = Q \Leftrightarrow \mathfrak{M}^t Q^t = Q^t$ die Zeilen von Q Eigenvektoren von $\mathfrak{M}^t$ zum EW $\lambda = 1$.

Diese sind aber Vielfache von $(1, \ldots 1)$, da

$(m_{1j}, \ldots m_{kj}) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{k} m_{ij} = 1$ (da $\mathfrak{M}$ stochastisch)

$$\rightsquigarrow \quad Q = \begin{pmatrix} z_1 & \cdots & z_1 \\ \vdots & & \vdots \\ z_k & \cdots & z_k \end{pmatrix}$$

Da $\mathfrak{M} Q = Q \Rightarrow$ die Spalten von Q sind EV zu EW $\lambda = 1$

$\Rightarrow \mathfrak{M} z = z$ ist der eindeutig bestimmte Gleichgewichtszustand. $\square$