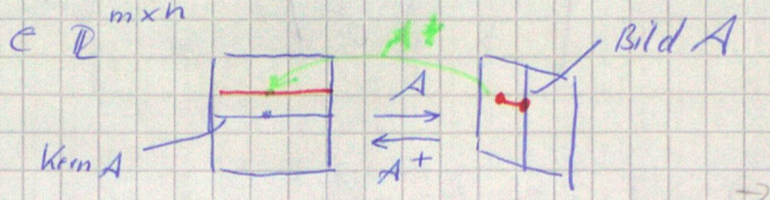
Beispiel: Pseudoinverse

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$



orthogonale Projektion von Bild
→ Reihe von Urbildern
→ Punkt, der am nächsten am Ursprung ist

Summe d(t)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^+ ?$$

$$\text{Ker } A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \ni \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{y_1}$$ Orthonormal-Basis von Ker A

$$\text{Bild } A = \text{Spann} \underset{w_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{w_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

Berechnen Orthonormalbasis mit Gram Schmidt

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

senkrecht machen

$$u_2 = w_2 - \langle v_1 w_2 \rangle v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{6}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

normiert

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Um A^+ aufzustellen, berechnen wir Bilder der Basisvektoren:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{auf Bild } A]{\text{Projektion}} \langle v_1 e_1 \rangle v_1 + \langle v_2 e_1 \rangle v_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longleftarrow \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Urbild (von $p(e_1)$)

orthogonale Projektion auf $(\text{Ker } A)^\perp$

$$p(e_1) - \langle p(e_1) y_1 \rangle y_1 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{4/3 - \frac{1}{2}}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ *

$$\begin{pmatrix} 4/3 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$*$

$$= \begin{pmatrix} 4/3 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{5}{6}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 46-5 \\ -9-5 \\ 0+5 \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 19 \\ -14 \\ 5 \end{pmatrix}$$ 1. Spalte A^+

$\in (\ker A)^\perp$ da $\perp \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$e_2 = \xrightarrow[\text{auf Bild}A]{\text{Projektion}} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(\ker A)^\perp]{\text{Proj.}} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3\cdot\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3-1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Spalte

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Bild}A]{\text{Proj. auf}} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\downarrow A$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$ Proj. auf $(\ker A)^\perp$

$$\begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -2\cdot 6+1 \\ 9+1 \\ 0-1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -11 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker A^\perp$$

$$A^+ = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 19 & 4 & -11 \\ -14 & -2 & 10 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

zur Probe: $P = AA^+ = \begin{pmatrix} 5/6 & 1/3 & -1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/6 & 1/3 & 5/6 \end{pmatrix}$ Probe $P^2 = P$

$Q = A^+A = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ Projektion mit Bild$(\ker A)$ $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $Q^2 = Q$

Klausur: evtl. 2×2 Matrix?

Wiederholung

Körper K: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}_{(p)}$

Vektorraum, lineare Abbildungen

Basis, linear unabhängig, erzeugend

V Vektorraum, $A = v_1, \ldots v_n$ Basis

Isomorphismus

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \\ K^n \arrow[u, "\Phi_A"] \arrow[r, "A"'] \arrow[ur, phantom, "\cong"] & K^m \arrow[u, "\Phi_B"'] \end{tikzcd}$$

lineare Abb. auf Matrizen zurückführen

Anwendung: Gleichungssysteme

$Ax = b$ Lösbarkeit! (Klausur)

Gauss-Algorithmus (später LR Zerlegung)

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[r, "B"] \arrow[d, "\varphi_{A'}"'] & K^m \arrow[d, "\varphi_{B'}"] \\
V \arrow[r] & W \\
K^n \arrow[r, "A = M_B^A(f)"'] \arrow[u, "\varphi_B"] \arrow[uu, bend left, "T = M_{A'}^{A}(id_V)"] & K^m \arrow[u, "\varphi_B"'] \arrow[uu, bend right, "M_B^{B'}(id_W) = S"']
\end{tikzcd}$$

Basiswechsel

$B = SAT^{-1}$

Klassifikationssatz

$A \in K^{m \times n}$, rank $A = r$

invertierbare Matrizen

$\exists T \in GL(n,K)$, $S \in GL(m,K)$

$$SAT^{-1} = \begin{array}{c}\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix} & \\ \hline & \end{array}\right)\begin{matrix} \}\, r \\ \}\, n-r \end{matrix} \\ \begin{matrix} \underbrace{\quad}_{r} & \underbrace{\quad}_{n-r} \end{matrix}\end{array}$$

$\rightsquigarrow$ Singulärwertzerlegung

Invertierbare Matrizen

$\{ A \in K^{n \times n} \mid A$ ist invertierbar $\} = GL(n,K)$

inverse A^{-1}

Determinante: $\det: K^{n \times n} \to K$

$\det A \neq 0 \iff A \in GL(n,K)$

$\neq 0$ wenn invertierbar

Kästchensatz!

Entwicklung nach Zeilenspalten

Produktsatz

Laplace-Formel $A = (a_{ij})$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Matrix-Gruppen S_n, $GL(n,K)$

$SL(n,K)$ $SO(n,\mathbb{R})$

$M(n) \in GL(n,\mathbb{Q})$

$\left(\mathrm{Spin}(3) \xrightarrow{2:1} SO(3) \ni A(v_1, v_2, v_3) \right)$

Operationen (mit Gruppen)

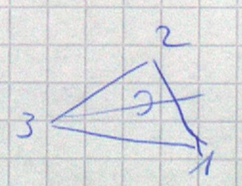
$G \times \Omega \to \Omega$

Beispiele: $GL(n,K) \times K^n \to K^n$

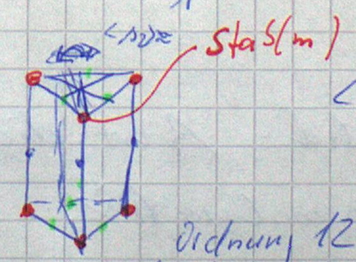
$(A, x) \to Ax$

$S_n \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$

Symmetriegruppen



$\mathrm{Sym}(\Delta) \cong S_3$



$\langle s_1 s_2 \rangle$ Untergruppe der Ordnung 4

Ordnung 12

$|G| = 12$

$G = \mathrm{Sym}\,\square = \mathbb{Z}_2 \times S_3$

Bahnen und Untergruppen

$G \times \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ Operation

$m \in \mathfrak{M}$ Punkt

$G \cdot m = \{gm \mid g \in G\}$ Bahn

Stabilisator $\quad \mathrm{Stab}(m) := \{g \in G \mid gm = m\}$

Ordnung einer ~~Ugl~~ Untergruppe teilt die Ordnung.

$|G| = [G:H] \cdot |H|$

$?H \quad \{gH \mid g \in G\} \in 2^{G}$

Index = Anzahl der Nebenklassen $\quad G/H = \{g.H \mid g \in G\}$ Nebenklassen

Es gibt eine natürliche Bijektion.

$G/H \to Gm \quad ; \quad gH \to gm$ ist wohldefiniert, Bijektion

wobei $H = \mathrm{stab}(m)$

$|Gm| = [G:H]$

Operation durch Konjugation:

$GL(n,K) \times K^{n \times n} \to K^{n \times n}$

Diagonalisierg. $\quad (S, A) \to SAS^{-1}$

A und SAS^{-1} heißen ähnlich. A ist diagonalisierbar, wenn A ähnlich zu Diagonalmatrix.

Eigenwerte / Eigenvektoren

λ ist EW von A falls $v \in K^n$ existiert, $v \neq 0$

$Av = \lambda v \qquad v$ Eigenvektor

Spalten von S^{-1} Basis

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$AS^{-1} = S^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} = (v_1 \dots v_n)$$

$$Av_i = \lambda v_i$$

$$\chi_A(t) = \det(A - tE)$$

Vielfachheit $\quad m(\chi_A, \lambda) =$ Vielfachheit des Faktors $(t-\lambda)$ von dem Polynom $\chi_A(t)$

! $\quad > \dim \mathrm{Eig}(A, \lambda)$

$$\mathrm{Eig}(A, \lambda) = \{v \mid Av = \lambda v\} = \ker(A - \lambda E)$$

Eigenraum

Diagonalisierbarkeitskriterium

Symmetr. Matrizen $\quad {}^tA = A$

immer diagonalisierbar mit Orthogonal-Matrizen

$v_1 + v_1^{\perp}$

$$\left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline A'v' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & A' \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline v' \end{array}\right) \qquad A'v' = \lambda' v'$$