25.06.14

①

$V_1 = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig } 2\pi\text{-periodisch} \}$

$\cap$

$V_2 = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ } 2\pi \text{ periodisch über } [0, 2\pi] \text{ integrierbar} \}$

$\langle \,,\, \rangle : V_2 \times V_2 \to \mathbb{C}$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)}\, g(t)\, dt$$

$\langle \,,\, \rangle$ ist ein Skalarprodukt auf V_1 aber nicht auf V_2

$e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad e_n(t) = e^{int} \quad n \in \mathbb{Z}$

Orthogonalsystem in V_1

$c_k = \langle f, e_k \rangle$ k-ter Fourierkoeffizient

$\sum_{k=-n}^{n} c_k e_k$ n-tes Fourierpolynom in $f \subset V_2$

$f \to \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \in \operatorname{Spann}(e_{-n}, \dots e_n)$

ist die orthogonale Projektion auf den Unterraum

<u>Satz</u>: $f \in V_2$, c_k der k-te Fourierkoeffizient von f

$$0 \leq \| f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \|^2 = \| f \|^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$$

Beweis

$$f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \perp \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \quad \text{Pythagoras}$$

$$\|f\|^2 = \|f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k + \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k\|^2$$

$$= \|f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k\|^2 + \|\sum_{k=-n}^{n} c_k e_k\|^2$$

$$= \|f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k\|^2 + \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$$

Umstellen gibt die Behauptung. □

Cor: Besselsche Ungleichung

$f \in V_2$, (c_k) die Fourierkoeffizienten

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|f\|^2$$

Beweis: Nach dem Satz sind die Partialsummen

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 < \|f\|^2$$

Mit $n \to \infty$ folgt die Behauptung. □

Bem.: $V_2 \to \ell^2(\mathbb{C}) = \{(c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \mid \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty\}$

$$f \to (c_k)_{k\in\mathbb{Z}} = (\langle f, e_k\rangle)_{k\in\mathbb{Z}}$$

ist eine lineare Abbildung in den Hilbertraum $\ell^2(\mathbb{C})$

Def: Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch integrierbar, also $f \in V_2$

Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V_2$ konvergiert im quadratischen Mittel gegen f, wenn

$$\|f - f_n\|_2 = (\langle f - f_n, f - f_n\rangle)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Satz: Vollständigkeitsrelation

Für jede 2π-periodische, integrierbare Funktion f gilt:

Die Fourierreihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e_k$ von f konvergiert im quadratischen Mittel gegen f und

$$\|f\|_2^2 = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2}_{\|\ \|_2^2 \text{ in } \ell^2(\mathbb{C})}$$

Bem: Also $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ läßt sich durch Hinzunahme einer weiteren Funktion nicht zu einem größeren Orthonormalsystem erweitern.

Angenommen: $g \perp e_k \ \forall_k$ und $\|g\|_2 = 1$

Widerspruch $\underset{1}{\underbrace{\|g\|_2^2}} = 0$ ↯

Cor: Für $f \in V_2$ gilt $\|f\|^2 = 0 \iff$ alle c_k

Auf V_2 haben wir drei Konvergenzbegriffe

1) Gleichmäßige Konvergenz

$\swarrow$ $\qquad\qquad$ $\searrow$

2) Punktweise Konvergenz $\quad$ $\nwarrow$ keine Implikation $\nearrow$ $\quad$ 3) Konvergenz im quadrat. Mittel

Satz: Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetige, stückweise stetig diff'bare 2π-periodische Funktion. Dann konvergiert die Fourierreihe gleichmäßig gegen f. $\square$

Beweis dazu im Skript.

Anwendung von Fourierreihen in der Informatik

1) Statt eine Funktion f abzuspeichern, können wir endlich viele Fourier-Koeffizienten abspeichern und haben noch eine „gute" Approximation.

   Vergessen wir einige dieser Fourier-Koeffizienten, so brauchen wir weniger Speicher, auf Kosten der Güte der Approximation.

2) Hardware: Fourierreihen haben Anwendungen um die CPU-Taktung herzustellen.
   Mit einem Transistor und Rückkopplung lassen sich $\sin(rt)$ und $\cos(rt)$ erstellen.
   Linearkombination liefert Approximation der Taktfunktion.

§ 28 Numerische lineare Algebra

Bei der Verwendung von Floatingpointzahlen sind Rundungsfehler unvermeidlich.

Bsp.: Rechengenauigkeit 3 Dezimalstellen

$$\begin{pmatrix} 1.00 \cdot 10^{-4} & 1.00 \\ 1.00 & 1.00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.00 \\ 2.00 \end{pmatrix}$$

Lösung auf 5 Stellen genau:

$x_1 = 1.0001 \qquad x_2 = 0.9999$

Gerundet auf 3 Stellen:

$x_1 = 1.00 \qquad x_2 = 1.00$

Welches Ergebnis liefert der Gauß-Algorithmus bei Rundung?

$\mathrm{II} \cdot 10^{4} - \mathrm{I}$

$$\begin{pmatrix} 1.00 \cdot 10^{-4} & 1.00 \\ 0 & 1.00 \cdot 10^{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.00 \\ 1.00 \cdot 10^{4} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_2 = 1.00$ richtig, $x_1 = 0.00$ falsch

Vertauschen der Zeilen gibt

$$\begin{pmatrix} 1.00 & 1.00 \\ 0 & 1.00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.00 \\ 1.00 \end{pmatrix}$$

also

$x_2 = 1.00$ und $x_2 = 2.00$ korrekte Lösung!

Gaußalgorithmus mit Spaltenpivotstrategie

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Bringen $A = A^{(1)} \rightsquigarrow A^{(2)} \sim \dots \sim A^{(n)}$ sukzessive in Zeilenstufenform

(k+1)

a) im k-ten Schritt wählen wir ein $p \in \{k, \dots, n\}$

so dass $|a_{pk}^{(k)}| \geq |a_{jk}^{(k)}|$ für $j = k, \dots, n$

b) vertauschen p-te Zeile mit k-ter Zeile

c) eliminieren die Einträge in k-ter Spalte unterhalb des k-ten Eintrags

$$\Rightarrow \quad A^{(k+1)} = L_k P_k A^{(k)}$$

wobei
$$P_k = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ \quad k \quad p \end{array}$$
(Permutationsmatrix)

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & l_{k+1,k} & \ddots & \\ & & \vdots & & \\ 0 & & l_{nk} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ mit $|l_{jk}| \leq 1$

$j = k+1, \dots, n$

Satz (L, R-Zerlegung)

Sei $A \in GL(n, \mathbb{R})$. Dann existiert eine Permutationsmatrix P, eine unipotente untere Dreiecksmatrix L

Einträge auf Diag. alle 1

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ l_{ij} & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } |l_{ij}| \leq 1$$

und eine obere Dreiecksmatrix

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{nn} \end{pmatrix}$$

so dass $PA = LR$ gilt

Beweis:

$P = P_{n-1} \cdots P_1$ ist das Produkt der Permutationsmatrizen aus dem Gauß-Algorithmus mit Pivotstrategie.

Da für $j < k$ $\quad P_k L_j P_k = \hat{L}_j$

da
wobei $\hat{L}_j$ sich von L_j nur durch die Reihenfolge der Einträge in der j-ten Spalte unterscheidet, läßt sich das Ergebnis des Gauß-Algorithmus

$$L_{n-1} P_{n-1} \cdots L_2 P_2 L_1 P_1 A = R$$

?

umformen

zu
$$\tilde{L}_{n-1} \tilde{L}_{n-2} \cdots L_1 \; P_{n-1} \cdots P_1 \; A = R$$

wobei sich $\tilde{L}_j$ von L_j nur durch die Reihenfolge der Elemente in der j-ten Zeile unterhalb der Diagonale unterscheidet.

$$\tilde{L}_j = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & l_{j+1} & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & l_{nj} & & & 1 \end{pmatrix}$$

Mit $L = \tilde{L}_1^{-1} \cdots \tilde{L}_{n-1}^{-1}$ gilt

$$PA = LR$$

$$\tilde{L}_j^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & -l_{j+1,j} & \\ & & \vdots & \ddots \\ & & -l_{n,j} & & 1 \end{pmatrix}$$

erfüllt $|l_{ij}| < 1$ für $i > j$)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ -\tilde{l}_{21} & 1 & & \\ \vdots & & 1 & \\ -\tilde{l}_{n1} & & -l_{ij} & \ddots \; 1 \end{pmatrix}$$

also $|-\tilde{l}_{ij}| \leq 1$ nach wie vor

Die Reihenfolge ist wesentlich!! ◁ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Statt $Ax = b$ zu lösen, lösen wir

$$LRx = Pb$$

bzw. $$Rx = \underbrace{\tilde{L}_1 \tilde{L}_2 \cdots \tilde{L}_{n-1}}_{L^{-1}} Pb$$

alle Eigenwerte 1

Um Rundungsfehler zu vermeiden, wären Orthogonale Matrizen Q statt L besser.

Satz: QR-Zerlegung

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
Dann existiert eine Orthogonale Matrix $Q \in O(n)$ und eine obere Dreiecksmatrix R, so dass

$$A = QR$$

Inverse: nur transponieren

${}^tQ = Q^{-1}$

Bem: Statt $Ax = b$ zu lösen, können wir $Rx = {}^tQ\, b$ lösen.

Besser als mit der LR-Zerlegung.

Um die QR-Zerlegung zu berechnen gibt es zwei Methoden.

1) mit Rotationen — eingeführt von Givens in die Numerik

Eigenwerte meist komplexe $\mathbb{Z}$

2) mit Spiegelung — eingeführt von Householder

Bsp: $$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left\| \binom{a}{b} \right\|_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rotationsmatrix

Q läßt sich mit $\binom{n}{2}$ Givensrotationen bestimmen.

Besser geht es mit Householder-reflektionen.
Q ist ein Produkt von $(n-1)$ Spiegelungen.

Satz/Def: Sei $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$.

Die Abbildung

$$s_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad \text{mit } s_v(x) = x - 2\frac{\langle x, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v$$

beschreibt eine Spiegelung an der Hyperebene

$$H = v^\perp \quad \text{mit } s_v(v) = -v$$

Die darstellende Matrix ist:

$$Q_v = E - 2 \frac{v \cdot {}^t v}{\langle v, v \rangle}$$

Ferner gilt:

a) Q_v ist symmetrisch

b) $Q_v^2 = E$ ist eine Involution.

c) Q_v ist orthogonal.

<u>Beweis:</u>

a) ${}^t(v \cdot {}^t v) = ({}^{tt}v \cdot {}^t v) = v \cdot {}^t v$

b) $Q_v = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(s_v)$ gilt, da Q_v auf $H = v^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid {}^t v \cdot v = 0\}$ die Identität ist (Standardbasis)

und $Q_v(v) = v - 2 \frac{v \cdot {}^t v}{\langle v, v \rangle} \cdot v = v - 2v \cdot \frac{\langle v, v \rangle}{\langle v, v \rangle} = -v$

b) $Q_v^2 = \left(E - 2 \frac{v\, {}^t v}{\langle v, v \rangle}\right)^2 = E^2 - 4 \frac{v\, {}^t v}{\langle v, v \rangle} + 4 \frac{v \cdot \overbrace{{}^t v \cdot v}^{= \langle v, v \rangle} \cdot {}^t v}{\langle v, v \rangle^2}$

$= E$

c) folgt aus a) und b) $\square$