27.06.14

1. Schritt der QR-Zerlegung (mit Householder-Reflektionen) ①

$A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

suchen: $Q_v = E - 2 \frac{v \cdot {}^t v}{\langle v, v \rangle}$ so dass

$$Q_v = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{array} \right)$$ rekursiv

Der Vektor a_1 soll also auf ein Vielfaches von $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ gespiegelt werden

Da $Q_v \in O(n) \Rightarrow \alpha_1 = \pm \| a_1 \|_2$ euklid. Norm

Ferner

$$\alpha_1 e_1 = a_1 - 2 \frac{\langle v, a_1 \rangle}{\langle v, v \rangle} v$$

$\Rightarrow v \in \text{Spann}(a_1, e_1)$

Behauptung: $v = a_1 - \alpha_1 e_1$ hat die gewünschte Eigenschaft.

$$\langle v, v \rangle = \langle a_1 - \alpha_1 e_1, a_1 - \alpha_1 e_1 \rangle$$

$$= \| a_1 \|^2 - 2 \alpha_1 \underbrace{\langle a_1, e_1 \rangle}_{\text{Eintrag } a_{11}} + \alpha_1^2$$

$$= 2 (\alpha_1^2 - a_{11} \alpha_1)$$

2

$$Q_v(a_1) = a_1 - 2\frac{\langle v, a_1\rangle}{\langle v, v\rangle}\cdot(a_1 - \alpha_1 e_1)$$

$$= a_1 - \underbrace{\frac{\langle a_1-\alpha_1 e_1, a_1\rangle}{(\alpha_1^2 - a_{11}\alpha_1)}}_{=1}(a_1 - \alpha_1 e_1)$$

$$= a_1 - (a_1 - \alpha_1 e_1) = \alpha_1 e_1 \text{ wie gewünscht}$$

Algorithmus zur QR-Zerlegung

Input: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Output: Q orthogonale Matrix, R obere Dreiecksmatrix
$A = QR$

Output genauer: $v_1, \dots v_{n-1}$ so dass $Q_{v_{n-1}} Q_{n-1} \dots Q_1 = Q$

1. Schritt: $A = (a_1, \dots a_n)$

$\alpha_1 = -(\operatorname{sign} a_{11})\|a_1\|$, $v_1 = a_1 - \alpha_1 e_1$

um Auslöschung von relevanten Ziffern zu vermeiden (immer Addition)

$$Q_{v_1}A = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & v_1 \\ \hline 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{array}\right)$$

2. Schritt: Fahre rekursiv mit A' fort

Als nächster Vektor $v_2 \in e_1^\perp$

$$Q_{v_2}Q_{v_1}A = \left(\begin{array}{c|c|c} \alpha_1 & \multicolumn{2}{c}{v_1} \\ \hline 0 & \alpha_2 & v_2 \\ \cline{3-3} & 0 & A'' \end{array}\right)$$

Bem.: Die Daten für die QR-Zerlegung brauchen wenig mehr Speicherplatz als für A

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & \multicolumn{3}{c}{v_1} \\ & v_2 & \multicolumn{2}{c}{v_2} \\ & & v_3 & v_3 \end{array}\right) + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Bem.: Die QR-Zerlegung von $A \in GL(n, \mathbb{R})$ ist bis auf das Produkt mit einer ~~Dia~~ orthogonalen Diagonalmatrix, d.h. eine Diagonalmatrix mit ± 1 auf der Diagonalen, eindeutig.

Beweis: $QR = Q'R' \Rightarrow \underbrace{{}^tQ\,Q}_{\text{orthogonal}} = \underbrace{\underbrace{R'}_{}\underbrace{R'}_{}}_{\text{obere Dreiecksmatrix}}$

obere Dreiecksmatrix

$$\Rightarrow {}^tQ'Q = D = \operatorname{diag}(\pm 1) \qquad D^2 = E$$

$$QR = (QD)(DR)$$

§ 29 Matrixnormen und Eigenwertabschätzungen

④

Motivation: Eigenwerte einer Matrix über das charakteristische Polynom auszurechnen, ist aufwendig.

Können wir die Eigenwerte mit geringerem Aufwand abschätzen?
Wichtig für Konvergenzbetrachtungen von iterativen Algorithmen, etwa für die Hauptachsentransformation.

Matrixnormen helfen.

Def: Eine Matrixnorm ist eine Abbildung

$$\| \ \| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften.

1) $\|A\| \geq 0 \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

2) $\|\lambda A\| = |\lambda| \, \|A\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

3) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ Δ-Ungleichung

4) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ Submultiplikativität $\forall A,B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Beispiele:

Max Beträge der Einträge

a) Gesamtnorm $\|A\|_{G} = n \cdot \max_{i,j} |a_{ij}|$

b) Zeilensummennorm $\|A\|_Z = \max_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right)$

c) Spaltensummennorm $\|A\|_S = \max_j \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right)$

⑤

d) Frobeniusnorm $\|A\|_F = \left(\sum_{i,k} |a_{ik}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

e) Spektralnorm $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}({}^tA\,A)}$

wobei $\lambda_{max}({}^tA\,A)$ der Betrag des betragsmäßig größten Eigenwert von ${}^tA\,A$ ist.

Da Matrizen und Vektoren gleichzeitig auftreten, sollen die Matrixnorm und Vektornorm verträglich sein.

Def: Eine Matrixnorm $\| \ \|_M$ auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist mit einer Vektornorm $\| \ \|_V$ auf $\mathbb{R}^n$ verträglich, wenn

$$\|Ax\|_V \leq \|A\|_M \cdot \|x\|_V \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Beispiele:

Für die p-Normen $1 \leq p \leq \infty$

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{2}} & 1 \leq p \leq \infty \\ \max_{j=1,\dots,n} |x_j| & p = \infty \end{cases}$$

gilt:

a) $\|A\|_G$ und $\|A\|_S$ sind verträglich mit $\|x\|_1$, Betragssummennorm

b) $\|A\|_G$, $\|A\|_F$, $\|A\|_2$ sind verträglich mit der euklid. Norm $\|x\|_2$

c) $\|A\|_G$, $\|A\|_Z$ sind verträglich mit $\|x\|_\infty$, Maximumnorm

Beweis in einem Fall

$\|A\|_G$ und $\|x\|_\infty$ sind verträglich

$$\|Ax\|_\infty = \max\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k\right|\right\}$$

$$\le \max_i \left\{\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}||x_k|\right\} \qquad \text{Δ-Ungl.}$$

$$\le \max\left\{\sum_{k=1}^{n} \max_{r,s} |a_{rs}| \cdot \max_{e} |x_e|\right\}$$

$$= \|A\|_G \|x\|_\infty \qquad \square$$

Da es zu einer Vektornorm mehrere verträgliche Matrixnormen $\|\cdot\|_M$ geben kann, verwendet man in der Praxis häufig diejenige, für die die Abschätzung

$$\|Ax\|_V \le \|A_M\| \|x\|_V$$ am schärfsten ist.

Def: Zu einer Vektornorm heißt

$$\|A\| := \max_{x \neq 0} \left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\right\}$$ die zugehörige Matrixnorm

$$= \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Bem: Dies ist in der Tat eine Matrixnorm.

Beispiele:

Vektornorm	zugehörige Matrixnorm
$\|x\|_1$ Betragssummennorm	$\|A\|_S$ Spaltensummennorm
$\|x\|_2$ eukl. Norm	$\|A\|_2$ Spektralnorm
$\|x\|_\infty$ Maximumnorm	$\|A\|_Z$ Zeilensummennorm

Satz: Eigenwertabschätzung mit Matrixnorm

Ist λ ein EW von A und $\|A\|$ der Wert einer beliebigen verträglich zu einer Vektornorm $\|\cdot\|_V$ Matrixnorm. Dann gilt:

$$|\lambda| \le \|A\|$$

Beweis: Sei x ein EW zu λ. Dann gilt

wegen Verträglichkeit

$$|\lambda| \|x\| = \|\lambda x\| = \|Ax\| \le \|A\| \|x\|$$

nun $x \neq 0$, also $\|x\| \neq 0$

$$\Rightarrow |\lambda| \le \|A\|$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}1 & -0{,}1 \\ 0 & 2 & 0{,}4 \\ -0{,}2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\|A\|_G = 3 \cdot 3 = 9$

$\|A\|_Z = \max\{1{,}2;\ 2{,}4;\ 3{,}2\} = 3{,}2$

$\|A\|_S = \max\{1{,}2;\ 2{,}1;\ 3{,}5\} = 3{,}5$

$\|A\|_F = \sqrt{1^2 + (0{,}1)^2 + (0{,}1)^2 + 2^2 + (0{,}4)^2 + (0{,}2)^2 + 3^2}$

$= \sqrt{14{,}22} \approx 3{,}77$

Also $|\lambda| \le \|A\|_Z = 3{,}2$ ist die beste Abschätzung.

Tatsächlich gilt:

$\lambda_1 = 3{,}0060$

$\lambda_2 = 2{,}0078$

$\lambda_3 = 0{,}9862$

Der obige Satz macht nur eine Aussage über den betragsmäßig größten EW.
Es geht besser.

Satz: (Gerschgorin)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

a) Die Vereinigung der Kreisscheiben

$$K_i = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \le \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne i}}^{n} |a_{ik}| \}$$

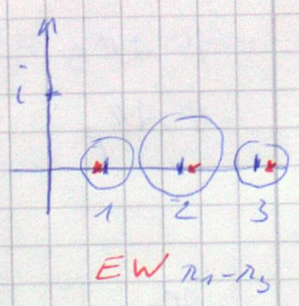
$i = 1, \dots, n$ enthält sämtliche Eigenwerte von A.

b) Jede Zusammenhangskomponente der Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{n} K_i$ aus m Kreisen enthält genau m EW mit Vielfachheit gezählt.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}1 & -0{,}1 \\ 0 & 2 & 0{,}4 \\ -0{,}2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$K_1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \le 0{,}2 \}$
$K_2 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-2| \le 0{,}4 \}$
$K_3 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-3| \le 0{,}2 \}$



Da K_1, K_2, K_3 sich nicht überlappen, liegt in jeder Kreisscheibe genau ein EW von A.

Satz: Invertierbarkeit von strikt diagonaldominanten Matrizen

größter Therme in der Diagonale (bezgl. Zeile)

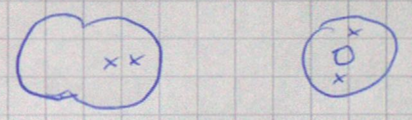
Ist A in $\mathbb{R}^{n \times n}$ strikt diagonaldominant, d.h.

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne i}}^{n} |a_{ik}|$$

dann ist A invertierbar.

Beweis: Die Gerschgorin-Kreise enthalten die 0 nicht, d.h. 0 ist kein EW und daher A invertierbar. □

NB: bei überlappenden Kreisen, keine konkrete Aussage möglich



d.h. nicht in jedem muss ein EW liegen