UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp

Übungen zur Vorlesung Analysis 2

Sommersemester 2015

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 10.00 Uhr, am 23.06.2015, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.

Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 8 15. Juni 2015

Aufgabe 1. Seien $R > r > 0$ reelle Zahlen und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$g(\alpha, \beta) = ((R + r \cdot \cos\beta)\cos\alpha, (R + r \cdot \cos\beta)\sin\alpha, r \cdot \sin\beta)$$

die Toruskoordinaten. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ist überall regulär.

(b) Sei

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x^2 + y^2).$$

Für die Gleichung

$$f(x, y, z) = 0$$

lässt sich in jedem Punkt der Satz über implizite Funktionen anwenden.

(c) $g(\mathbb{R}^2) = T := N_0(f)$.

Aufgabe 2. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ x \mapsto xy - x - y$ und $b = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$. Berechnen Sie die Folge von Funktionen $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definiert vermöge

$$g_k(x) = G(x, g_{k-1}(x)),\ \text{mit}\ G(x, y) = y - b^{-1} \cdot f(x, y)$$

explizit für den Startwert $g_0 = 0$. In welchem Bereich konvergiert die Folge?

Aufgabe 3. Sei $f(x, y) : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(0, 0) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \neq 0$. Wie im Satz über implizite Funktionen sei $g : V \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $g(0) = 0$, sodass $f(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in V$. Zeigen Sie:

(a) $g'(0) = -\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)/\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

(b) $g''(0) = -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(0, 0) \cdot g'(0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \cdot (g'(0))^2\right) / \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

(c) Stellen Sie die entsprechende rekursive Formel für $g'''(0)$ auf.

Aufgabe 4. Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x^2 + 2xy + y^2, e^x e^y).$$

Zeigen Sie, dass $Df(x, y)$ konstanten Rang hat und berechnen Sie Bild und Urbilder in einer Umgebung des Nullpunktes.