UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Michael Hoff

Seminar über Riemannsche Flächen

Wintersemester 2016/17

Alle Informationen zum Seminar sind auf der folgenden Seite zu finden:
http://www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/index.php/teaching/ws-16-17/118-seminar-ueber-riemannsche-flaechen

Themenaufteilung 28.07.2016

Das Seminar folgt dem Buch

- Otto Forster: Riemannsche Flächen, Springer-Verlag, 1977.

Alle nachfolgenden Kapitelangaben verweisen auf dieses Buch. Die folgende Literaturliste ist ergänzend:

- Rick Miranda: Algebraic Curves and Riemann Surfaces, Graduate Studies in Mathematics (AMS), 1995
- Jean-Pierre Serre: Faiceaux Algebraiques Coherents, The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 61, No. 2. (Mar., 1955), pp. 197-278.
- Robert Gunning: Vorlesungen über Riemannsche Flächen, BI–Hochschultaschenbücher, 1972

Detailierte Themenaufteilung:

(1) **Der Begriff der Garbe** (§6):
  - Prägarbe
  - Garbe
  - Beispiele, siehe auch §9
  - Halme und Keime
  - Einer Garbe zugeordneter Überlagerungsraum
  - Hausdorffeigenschaft

(2) **Kohomologiegruppen** (§12):
  - Koketten, Kozykel, Koränder
  - Kohomologiegruppe
  - Verfeinerung und Definition $H^1(X, \mathscr{F})$
  - Erste Berechnungen von Kohomologiegruppen
  - Der Satz von Leray
  - Die nullte Kohomologiegruppe

(3) **Das Dolbeaultsche Lemma** (§13): Ziel ist es zu zeigen, dass $H^1(X, \mathscr{O}) = 0$ für eine Kreisscheibe X.
  - Existenz der Lösung von $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$ für differenzierbare Funktionen auf der Kreisscheibe. (Differentialformen, Integration, Satz von Stokes)
  - $H^1(X, \mathscr{O}) = 0$ für eine Kreisscheibe X
  - $H^1(\mathbb{P}_1, \mathscr{O}) = 0$

(4) **Ein Endlichkeitssatz I** (§14): Ziel ist es zu zeigen, dass $H^1(X, \mathcal{O})$ ein endlich dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum ist.
  - L^2-Norm für holomorphe Funktionen (Grundbegriffe Funktionalanalysis)
  - Quadratintegrierbare Koketten, Schrumpfungen
  - Beschränkungsabbildung für erste Kohomologiegruppen hat endlich dimensionales Bild (bis exklusive 14.8)

(5) **Ein Endlichkeitssatz II** (§14):
  - Anwenden der Sätze aus Vortrag (4); resultiert im Beweis von $\dim_{\mathbb{C}}(H^1(X, \mathcal{O})) < \infty$
  - Definition des Geschlechtes
  - Anwendungen des Endlichkeitssatzes (Wiederholung Begriffe, Notation aus §9)

(6) **Die exakte Kohomologiesequenz** (§15):
  - Garbenhomomorphismus
  - Kern und Bild eines Garbenhomomorphismus
  - Exakte Sequenzen
  - Beispiele
  - Kohomologiesequenz zu einer kurzen exakten Garbensequenz
  - Der verbindende Homomorphismus
  - Satz von Dolbeault
  - De Rham Kohomologiegruppen

(7) **Der Satz von Riemann–Roch** (§16): In diesem Kapitel wird der zentrale Satz in der Theorie der kompakten Riemannschen Flächen bewiesen.
  - Divisoren und Divisoren von meromorphen Funktionen und Differentialformen
  - Grad eines Divisors
  - Die Garbe $\mathcal{O}(D)$
  - Die Garbe $\mathcal{H}^{D}_{D'}$
  - Satz von Riemann–Roch
  - Spezialitätsindex und erste Folgerungen

(8) **Serre Dualität I** (§17): Die beiden Vorträge beschäftigen sich mit einer einfachen Darstellung der Kohomologiegruppe $H^1(X, \mathcal{O}(D))$ mit Hilfe von Differentialformen.
  - Definition einer Linearform auf $H^1(X, \Omega)$
  - Wiederholung Residuum
  - Mittag–Leffler Verteilung von Differentialformen
  - Die Garbe $\Omega(D)$
  - Definition einer dualen Paarung
  - Injektivität der induzierten linearen Abbildung (bis exklusive 17.8)

(9) **Serre Dualität II** (§17):
  - Dualitätssatz von Serre
  - Erste Folgerungen
  - Die Riemann–Hurwitzsche Formel
  - Überlagerungen der Zahlenkugel
  - X kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g. Dann ist $H^1(X, \mathcal{O}(D)) = 0$ für D Divisor mit $\deg(D) > 2g - 2$
  - $H^1(X, \mathcal{M}) = 0$ auf einer kompakten Riemannschen Fläche

(10) **Funktionen und Differentialformen zu vorgegebenen Hauptteilen** (§18):
  - Mittag–Leffler Verteilung meromorpher Funktionen
  - Anwendung auf doppeltperiodische Funktionen
  - Die Wronski–Determinante
  - Weierstraß–Punkte
  - Differentialformen zu vorgegebenen Hauptteilen

(11) **Harmonische Differentialformen** (§19):
  - Komplexe Konjugation
  - Der $*$-Operator
  - Harmonische Differentialformen
  - Skalarprodukt auf $\mathscr{E}^{(1)}(X)$ und die Zerlegung von $\mathscr{E}^{(1)}(X)$
  - Satz von de Rahm–Hodge

(12) **Das Abelsche Theorem** (§20): Das Kapitel untersucht, wann eine meromorphe Funktion mit vorgegebenen Null- und Polstellenordnung auf einer kompakten Riemannschen Fläche existiert.
  - Funktionen zu vorgegebenen Divisoren, Lösung, schwache Lösung
  - Logarithmische Ableitung
  - Ketten, Zykel, Homologie
  - Abelsches Theorem
  - Anwendung auf doppeltperiodische Funktionen

(13) **Das Jacobische Umkehrproblem** (§21): Das Kapitel beschreibt die Struktur der Gruppe von Grad null Divisoren modulo Hauptdivisoren.
  - Gitter, Periodengitter
  - Jacobi–Matrix
  - Jacobi–Mannigfaltigkeit und Picard–Gruppe
  - Riemannsche Flächen vom Geschlecht 1 und ihre Jacobische.

(14) **Riemannsche Flächen und projektive algebraische Kurven**