UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp

Übungen zur Funktionentheorie

Sommersemester 2016

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 12.00 Uhr, am 07.07.2016, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.
Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 11

30.06.2016

Aufgabe 1. Konstruieren Sie eine meromorphe Funktion f auf der Einheitskreisscheibe, die einfache Pole vom Residuum 1 genau in den Punkten aus $\left\{1 - \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$ hat.

Aufgabe 2. Beweisen Sie die Darstellung

$$\cosh(z) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{2z}{(2n+1)\pi}\right)^2\right).$$

Aufgabe 3. Die Bernoulli Zahlen B_n sind durch die Gleichung

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

definiert. Zeigen Sie $B_{2k+1} = 0$ für $k \in \mathbb{N}$ und beweisen Sie die Rekursionsformeln

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n-1}{2k-1} B_{2k} = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass das unendliche Produkt

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 - nz^n)$$

auf $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ kompakt gegen eine auf D holomorphe Funktion f konvergiert, und bestimmen Sie die Nullstellenmenge von f. Zeigen Sie weiter, dass jeder Randpunkt von D Häufungspunkt der Nullstellenmenge von f ist.