



## Übungen zur Funktionentheorie

Sommersemester 2016

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 12.00 Uhr, am 21.07.2016, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.

Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: [www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/](http://www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/)

### Blatt 13

14.07.2016

**Aufgabe 1.** Bestimmen Sie die Singularitäten der folgenden Funktionen. Um welche Art von Singularität handelt es sich jeweils?

$$(a) f(z) = \frac{z}{z^2 - z - 12}$$

$$(b) f(z) = \frac{1}{(z^2 + 4)^2}$$

$$(c) f(z) = \frac{\sin(z) - z}{z^3}$$

$$(d) f(z) = \frac{e^{1/z}}{(z-1)^2}$$

**Aufgabe 2.** Berechnen Sie die Werte der folgenden Integrale

$$(a) \int_{|z|=2} \frac{\cos(z)}{z^2 + 1} dz$$

$$(b) \int_{|z|=1} \frac{z}{e^{iz} - 1} dz$$

$$(c) \int_{|z|=2} \exp\left(\frac{z}{1-z}\right) dz$$

$$(d) \int_{\gamma} \frac{z}{\cosh(z) - 1} dz$$

wobei  $\gamma$  der positiv orientierte Rand von  $G = \{x + iy \mid 5y^2 < (4\pi - 1)(1 - x^2)\}$  ist.

**Aufgabe 3.** (a) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen (mit Vielfachheit) der Funktion

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto (z^6 - 4z^2 - 2z + 8) \sin(z)$$

auf den offenen Kreisscheiben  $D_1(0)$  und  $D_2(0)$ .

(b) Gibt es eine ganze Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{2n-1}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  ?

**Aufgabe 4.** Sei

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=2}^{\infty} (2n-1)G_{2n}z^{2n-2}$$

die Laurententwicklung der Weierstrasschen  $\wp$  Funktion, wobei  $G_n = \sum_{0 \neq w \in \Omega} w^{-n}$  mit  $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$  ist. Zeigen Sie, dass für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt

$$\wp^{(k)} \in \mathbb{Z}[G_4, G_6, \wp] + \wp' \cdot \mathbb{Z}[G_4, G_6, \wp]$$