UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp

Übungen zur Funktionentheorie

Sommersemester 2016

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 14.00 Uhr, am 28.04.2016, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.
Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 1 — 21.04.2016

Aufgabe 1.

(a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der der folgenden komplexen zahlen:
  (i) $\frac{i-1}{i+1}$
  (ii) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$ mit $n \in \mathbb{N}$

(b) Seien $a, b \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: $|a+b|^2 = |a|^2 + |b^2| + 2\mathrm{Re}(\overline{a}b)$.

Aufgabe 2. Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Zahlenebene

(a) $H := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right) > 0 \right\}$ für $a, b \in \mathbb{C}$ mit $b \neq 0$

(b) $L := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - \frac{1}{2}\sqrt{2}| \cdot |z + \frac{1}{2}\sqrt{2}| = \frac{1}{2} \right\}$

Aufgabe 3. Sei $a \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$z^n = a$$

genau n verschiedene Lösungen hat. Bestimmen Sie zudem die Lösungen.
Hinweis: verwenden Sie Polarkoordinaten.

Aufgabe 4. Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen:

(i) G ist zusammenängend (d.h. es existieren keine disjunkten nichtleeren offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{C}$ mit $G = U \cup V$).

(ii) Jede lokal konstante Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ ist konstant. (Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ heißt lokal konstant, wenn es für jedes $z \in G$ eine offene Umgebung $U \subset G$ von z gibt, sodass $f|_U$ konstant ist)