UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp

Übungen zur Funktionentheorie

Sommersemester 2016

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 12.00 Uhr, am 19.05.2016, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.
Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 4 — 12.05.2016

Aufgabe 1. Berechnen Sie die folgenden Integrale

(a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\sin(z)}{z+i}dz$

(b) $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz$ für $n \geq 1$

(c) $\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{1}{(z-a)^n(z-b)^m}dz$ für $|a| < r < |b|$ und $n, m \geq 1$

Aufgabe 2. (a) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $L \subset \mathbb{C}$ eine Gerade und $f : G \to \mathbb{C}$ ein stetige Funktion, die auf $G \setminus L$ holomorph ist. Zeigen Sie, dass f dann schon auf ganz G holomorph ist.

(b) (Schwarz'sches Spiegelungsprinzip) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein bezüglich der reellen Achse symmetrisches Gebiet ($z \in G \Leftrightarrow \overline{z} \in G$) und sei $f : \{z \in G \mid \text{Im}(z) \geq 0\} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die auf $\{z \in G \mid \text{Im}(z) > 0\}$ holomorph und auf $\{z \in G \mid \text{Im}(z) = 0\}$ reellwertig ist. Zeigen Sie, dass durch

$$\widetilde{f} : G \to \mathbb{C}, z \mapsto \begin{cases} f(z) & \text{falls } \text{Im}(z) \geq 0 \\ \overline{f(\overline{z})} & \text{falls } \text{Im}(z) < 0 \end{cases}$$

eine auf ganz G holomorphe Funktion definiert wird.

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die auf $\mathbb{R}$ reellwertig ist. Zeigen Sie:

$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)}.$$

Aufgabe 4. Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in Potenzreihen um z_0:

(a) $f_1(z) = e^z,\ z_0 = \pi i$

(b) $f_2(z) = \dfrac{2z+1}{(z^2+1)(z+1)^2},\ z_0 = 0$

(c) $f_3(z) = (z-i)^{-3},\ z_0 = -i$