UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp

Übungen zur Funktionentheorie

Sommersemester 2016

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 12.00 Uhr, am 26.05.2016, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.
Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 5 — 19.05.2016

Aufgabe 1. Sei p ein Polynom vom Grad $n \geq 1$, dessen Nullstellen in $D_R(0)$ liegen. Berechnen Sie

$$\int_{\partial D_R(0)} \frac{p'(z)}{p(z)} dz$$

Aufgabe 2. Es sei $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ der Einheitskreis. Zeigen Sie

(a) Ist $f : D \to D$ holomorph mit $f(0) = 0$, so gilt $|f'(0)| \leq 1$ und $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in D$.

(b) Falls in (a) ein $z_0 \in D \setminus \{0\}$ mit $|f(z_0)| = |z_0|$ existiert, oder $|f'(0)| = 1$ gilt, so ist f eine Drehung um 0 (d.h. $f(z) = \lambda z$ mit $|\lambda|$=1).

(c) Ist $f : D \to D$ biholomorph, so ist f gebrochen linear, es existieren also $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \frac{z + \alpha}{\beta z + \gamma}.$$

Aufgabe 3. Es sei $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ der Einheitskreis. Untersuchen Sie die Existenz holomorpher Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$, die

(a) $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}$

oder

(b) $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^3}$

erfüllen.

Aufgabe 4. Seien $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie mit Hilfe der Hadarmard'schen Formel

$$\limsup_n \sqrt[n]{|c_1^n + \cdots + c_k^n|} = \max_{j=1,\ldots,k} |c_j|$$