UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp

Übungen zur Funktionentheorie

Sommersemester 2016

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 12.00 Uhr, am 02.06.2016, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.
Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 6 26.05.2016

Aufgabe 1. (a) Es sei $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom. Zeigen Sie, dass $p(\mathbb{C})$ abgeschlossen ist.

(b) Beweisen Sie den Fundamentalsatz der Algebra mit Hilfe von Teil (a).

(c) Sei $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ mit $a_n > 0$. Zeigen Sie, dass es reelle Zahlen $b_j, c_k, d_k,\ j = 1, \dots, s,\ k = 1, \dots, t$ mit $2t + s = n$ gibt, sodass

$$p(x) = a_n \prod_{j=1}^{s} (x - b_j) \prod_{k=1}^{t} (x^2 + c_k x + d_k)$$

gilt, wobei die Polynome $x^2 + c_k x + d_k$ keine reellen Nullstellen haben.

Aufgabe 2. Sei G ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : G \to f(G)$ biholomorph ist.

Aufgabe 3. Gibt es eine ganze Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ und einer Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

mit $a_\nu \in \mathbb{Q}$ und $a_\nu \neq 0$ für unendlich viele ν?

Aufgabe 4. Sei G ein Gebiet und seien $f_1, \dots, f_n : G \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Zeigen Sie: Hat

$$h(z) := \sum_{j=1}^{n} |f_j(z)|^2$$

ein Maximum in G, so sind alle f_j konstant.