



Übungen zur Funktionentheorie

Sommersemester 2016

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 12.00 Uhr, am 09.06.2016, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.

Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 7

02.06.2016

Aufgabe 1. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und seien $a, b \in \mathbb{C} \setminus G$ in der selben Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus G$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$z \mapsto \frac{z - a}{z - b}$$

einen holomorphen Logarithmus auf G hat.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie alle möglichen Werte von

$$\log((1 + i)^3), \quad \log((3 - 4i)^4), \quad 2^{-i}, \quad (-1)^{\sqrt{i}}$$

Aufgabe 3. Geben Sie möglichst große Gebiete an auf denen

$$\sqrt{\operatorname{Log}(z)}, \quad \operatorname{Log}(1 + \sqrt[3]{z}), \quad \sqrt{z + \sqrt{z}}$$

definiert ist.

Aufgabe 4. Es sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine nicht-konstante ganze holomorphe Funktion. Für $\alpha > 0$ sei

$$D_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \mid |f(z)| < \alpha\}$$

Zeigen Sie:

- Jede Zusammenhangskomponente von D_α ist einfach zusammenhängend.
- Jede beschränkte Zusammenhangskomponente von D_α enthält eine Nullstelle von f .
- Ist f ein Polynom, so ist D_α für hinreichend große α ein einfach zusammenhängendes Gebiet.