UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Christian Bopp

Übungen zur Funktionentheorie

Sommersemester 2016

Die Lösungen des Übungsblattes sind bis spätestens 12.00 Uhr, am 16.06.2016, in die Briefkästen vor dem Zeichensaal in Geb. E2 5, einzuwerfen.
Alle Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung werden auf der Seite unserer Arbeitsgruppe unter *Teaching* zu finden sein: www.math.uni-sb.de/ag-schreyer/

Blatt 8 — 09.06.2016

Aufgabe 1. (a) Berechnen Sie die Laurentreihe der Funktion

$$f(z) = \left(\frac{z}{z-1}\right)^k \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}$$

im Gebiet $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$.

(b) Bestimmen Sie den Hauptteil der Laurentzerlegung der Funktion

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{(z^2+b^2)^2} \quad \text{mit } b > 0$$

im Gebiet $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - ib| < 2b\}$.

Aufgabe 2. Berechnen Sie die folgenden Residuen

(a) $\operatorname{res}_1(z \cdot \exp\left(\frac{1}{1-z}\right))$

(b) $\operatorname{res}_{z_0}\left(\frac{\cos(z)}{(z^2+1)^2}\right)$ für $z_0 = \pm i$

(c) $\operatorname{res}_0\left(\frac{z-1}{\operatorname{Log}(z+1)}\right)$

Aufgabe 3. Gegeben seien Polynome $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ und $q(z) = b_{n+1}z^{n+1} + \cdots + b_0$ mit $n \geq 0$ und $b_{n+1} > 0$. Sei zudem $R > 0$ so groß, dass alle Nullstellen von q in $D_R(0)$ liegen. Zeigen Sie

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_R(0)} \frac{p(z)}{q(z)} dz = \frac{a_n}{b_{n+1}}.$$

Aufgabe 4. Es seien G ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $D \subset G$ diskret in G und $f : G \setminus D \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion f hat genau dann eine Stammfunktion auf $G \setminus D$, wenn die Residuen von f in allen Punkten von D verschwinden.

(b) Eine holomorphe Funktion $h : G \to \mathbb{C}$, $h \neq 0$ hat genau dann eine holomorphe Quadratwurzel, wenn alle Nullstellen von h eine gerade Ordnung haben.