4. Der Cauchysche Integralsatz

Der folgende Satz und seine Folgen sind fundamental für die FUNKTIONEN-THEORIE.

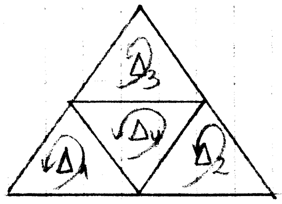
4.1 Satz (Goursat)

Es sei $\Delta \subset \mathbb{C}$ ein abgeschlossenes Dreieck und f eine auf einer Umgebung von Δ definierte holomorphe Funktion. Dann gilt: $\int_{\partial\Delta} f\,dz = 0$

BEWEIS

Sei f in einer Umgebung von Δ holomorph.

Wir zerlegen Δ in 4 Teildreiecke, indem wir die Seitenmitten miteinander verbinden.



Bei Summe $\sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta_j} f\,dz$ landen die im Inneren gelegenen Strecken zweimal umgekehrt durchlaufen. Diese fallen in der Summe weg, es gilt

$$\int_{\partial\Delta} f\,dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta_j} f\,dz$$

Also $|\int_{\partial\Delta} f\,dz| \leq 4 \cdot \max_j |\int_{\partial\Delta_j} f(z)\,dz|$

Wir wählen unter diesen 4 Dreiecken eins mit maximalem Betrag für das Integral aus: $\Delta^1 = \Delta_j$, j so gewählt, dass das Maximum oben angenommen wird.

Für die Bogenlänge gilt: $L(\partial\Delta^1) = L(\partial\Delta_j) = \frac{1}{2} L(\partial\Delta)$

Wir wiederholen dieses Argument nun mit Δ^1 und Δ^2 und erhalten in Δ^2 eine Folge $\Delta = \Delta^0 \supset \Delta^1 \supset \Delta^2 \supset \dots$ von Dreiecken

mit $|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz| \leq 4^n |\partial_{\Delta^n} f(z)\,dz|$ (1)

und $L(\partial\Delta^n) = \frac{1}{2} L(\partial\Delta^{n-1}) = \dots = \frac{1}{2^n} L(\partial\Delta^0)$ (2)

Wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ existiert ein Punkt

$z_0 \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \Delta^n$ ⊛ Die lineare Funktion $f(z_0) + (z-z_0) f'(z_0)$ hat eine Stammfunktion.

Wir verwenden die komplexe Differenzierbarkeit von f in z_0:

$$f(z) = f(z_0) + (z-z_0)(f'(z_0) + A(z))$$

mit einer in z_0 verschwindenen und in z_0 stetigen Funktion $A(z)$. ⊛

Es folgt
$$\left|\int_{\partial\Delta^n} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{\partial\Delta^n} (z-z_0)\, A(z)\,dz\right|$$
$$\leq L(\partial\Delta^n) \max_{z\in\partial\Delta^n} |(z-z_0)\, A(z)|$$
$$\leq L(\partial\Delta^n)^2 \max_{z\in\partial\Delta^n} |A(z)|$$

da für $z \in \partial\Delta^n$ $L(|z-z_0|) \leq L(\partial A^n)$

Also
$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right| \leq (L(\partial\Delta^n))^2 \cdot \max_{z\in\partial\Delta^n} |A(z)|$$
$$= L(\partial\Delta) \cdot \max_{z\in\partial\Delta^n} |A(z)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

da $A(z)$ stetig in z_0 und $A(z_0) = 0$

☒

2016-05-02 (4)

Für Anwendungen ist es nützlich von Satz 4.1 abzuschwächen und die Differenzierbarkeit in einer Umgebung von Δ mit Ausnahme von endlich vielen Punkten zu verlangen.

4.2 Satz

Sei Δ ein abgeschlossenes Δ und $z_0 \in \Delta$.
Ist f in einer Umgebung von Δ stetige und mit Ausnahme des Punktes z_0 komplex diffbare Funktion, dann gilt:

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$$

<u>BEWEIS</u>

Wir unterscheiden 3 Falle:

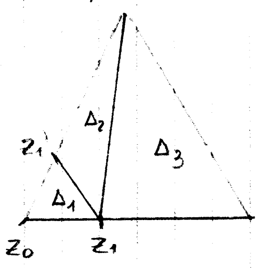
a) z_0 ist eine Ecke

b) z_0 liegt auf dem Rand

c) z_0 liegt im Inneren

2016-05-02
(4)

a) Sei z_0 eine Ecke von Δ. Dann wählen wir Punkte z_1, z_1' auf den beiden Kanten nahe z_0, und zerlegen Δ in 3 Teildreiecke wie eingezeichnet.



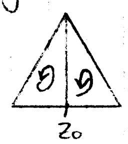
Nach Satz 4.1 gilt $\int_{\partial\Delta_2} f(z)dz = 0 = \int_{\partial\Delta_3} f(z)\,dz$

Es folgt $\int_{\partial\Delta} f(t)dt = \int_{\partial\Delta_1} f(z)dz$

und $\left|\int_{\partial\Delta} f(t)dt\right| = \left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)dz\right| \leq L(\Delta_1) \max_{z\in\Delta} |f(z)| \xrightarrow[z_1, z_1' \to z_0]{} 0,$

da $L(\Delta_1) \longrightarrow 0$ strebt.

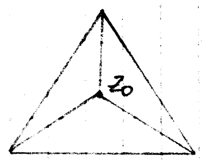
b) Wir zerlegen Δ wie folgt in 2 Dreiecke und wenden a) an.



z_0 liegt auf dem Rand.

c) Wir zerlegen Δ in 3 Teile und wenden wieder a) an.

z_0 liegt im Inneren.



$\square$

4.3 Satz

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und $f: G \to \mathbb{C}$ eine stetige mit Ausnahme eines Punktes holomorphe Funktion. Dann hat f eine Stammfunktion.

BEWEIS

Nach Satz 4.2 gilt für jedes $\Delta \subset G$ $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$.
Nach Satz 3.15 hat f eine Stammfunktion.

$\square$

4.4 Satz (Cauchysche Integralsatz für konvexe Gebiete)

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und $f: G \to \mathbb{C}$ eine stetige mit Ausnahme eines Punktes $z_0 \in G$ holomorphe Funktion.

Dann gilt für jeden geschlossenen Integrationsweg $\gamma: [a,b] \to G$ in G

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

BEWEIS

Nach 4.3 hat f eine Stammfunktion F auf G. Nach Korollar 3.12 verschwindet das Integral.

$\boxtimes$

Für $D = \mathcal{D}(w,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-w| \leq r\}$ eine **abgeschlossene Kreisscheibe** bezeichnet $\partial \mathcal{D}$ den Rand, den wir mit $[0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto w + r \cdot e^{it}$ parametrisieren können.

4.5 Satz (Cauchysche Integralformel)

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $\mathcal{D} \subset G$ eine abgeschlossene Kreisscheibe und $f: G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion.

Dann gilt für jeden Punkt $z \in \mathring{\mathcal{D}}$ im Inneren von $\mathcal{D}$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

BEWEIS

Sei $\mathcal{D} \subset U \subset G$ eine mit U konvexe Umgebung. Etwa falls $\mathcal{D} = \{z \mid |z - z_0| \leq r\}$, dann können wir $U = \{z \mid |z - z_0| < r + \varepsilon\}$, $0 < \varepsilon \ll 1$ wählen.

Auf U betrachten wir die Funktion $g: U \to \mathbb{C}$

$$g(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \text{für } \zeta \neq z \\ f'(z), & \text{für } \zeta = z \end{cases}$$

Dann ist g auf U stetig wegen der komplexen Diffbarkeit von f und auf $U \setminus \{z\}$ holomorph. Der Cauchysche Integralsatz lässt sich anwenden

$$0 = \int_{\partial \mathcal{D}} g(\zeta)\, d\zeta = \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

$$= \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dz - f(z) \int \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Es bleibt also $\displaystyle\int_{\partial \mathcal{D}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i$ zu zeigen.

2016-05-02 (4)

Der Integrant $\frac{1}{\zeta - z}$ ist als Funktion von z holomorph und Ableitung $\left(\frac{1}{\zeta-z}\right)' = \frac{1}{(\zeta-z)^2}$. Aus der Vertauschbarkeit von partieller Integrierbarkeit und Integration (ANALYSIS III, Folgerung aus dem Satz der Majorisierten Konvergenz) folgt

$$h(z) = \int_{\partial D} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

ist komplex diffbar und $h'(z) = \int_{\partial D} \frac{d\zeta}{(\zeta-z)^2} = 0$, da $\frac{1}{(\zeta-z)^2}$ als Funktion von ζ die Stammfunktion $\frac{-1}{(\zeta-z)}$ hat.

Es gilt also:

$$h(z) = h(z_0) = \int_{\partial D} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_0^{2\pi} \frac{i \cdot r \cdot e^{it}}{r e^{it}}\, dt = 2\pi i$$

Also $\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi i f(z)$ $\boxtimes$

2016-05-02
(4)

A. Vertauschung von Grenzprozessen

Im Beweis der Cauchyschen Integralformel hatten wir Integration und partielle Differentiation vertauscht. Wir wiederholen einige Fakten über die Vertauschung von Grenzprozessen. Das einfachste Beispiel ist der Satz für absolut konvergente Reihen.

A.1 Satz (Doppelreihensatz)

Es sei $(a_{\mu\nu}), \mu \in \mathbb{N}, \nu \in \mathbb{N}$ eine doppelt indizierte Folge komplexer Zahlen. Wenn die endlichen Teilreihen der Absolutbeträge beschränkt sind, d.h. $\exists K$ so, dass $\sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} |a_{\mu\nu}| < K \quad \forall\, n,m \in \mathbb{N}$ gilt, dann konvergieren die Doppelreihen $\sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} \right)$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu\nu} \right)$ und haben den gleichen Grenzwert.

BEWEIS: Forster, ANALYSIS I

A.2 Satz

Es sei $\gamma: [a,b] \to G \subset \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und (f_ν) eine Folge von stetigen Funktionen auf G, die auf $\Gamma = \gamma([a,b])$, der Spur des Weges, gleichmäßig konvergiert gegen $f: \Gamma \to \mathbb{C}$. Dann gilt $\lim_{\nu \to \infty} \int_\gamma f_\nu(z)\,dz = \int_\gamma \lim_{\nu\to\infty} f_\nu(z)\,dz$

BEWEIS

$f = \lim_{\nu\to\infty} f_\nu$ ist wegen der gleichmäßigen Konvergenz stetig auf Γ. Das Riemannintegral $\int_\gamma f(z)\,dz$ ist somit erklärt.

Ferner

$$\left| \int_\gamma f_\nu(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz \right|$$

$$\leq \int_\gamma |f_\nu(z) - f(z)|\,dz \leq L(\gamma) \max_{z \in \Gamma} |f_\nu(z) - f(z)| \xrightarrow{\nu\to\infty} 0$$

wegen der gleichmäßigen Konvergenz. ☒

A.3 Satz

Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und $\Gamma \subset \gamma([a,b])$ die Spur des Weges und $M \subset \mathbb{R}^n$ offene Teilmenge. Es sei $f : \Gamma \times M \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann ist:

(i) $F(x) := \int_\gamma f(\zeta, x)\, d\zeta$, $F : M \to \mathbb{C}$ stetig

(ii) Ist f nach x_ν partiell diff'bar und $\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\zeta, x)$ auf $\Gamma \times M$ stetig,

dann ist F partiell diffbar nach x_ν und $\frac{\partial F}{\partial x_\nu}(x) = \int_\gamma \frac{\partial F}{\partial x_\nu}(\zeta, x)\, d\zeta$

(iii) Ist $M \subset \mathbb{C}$ offen und $f(\zeta, z)$ für jedes $\zeta \in \Gamma$ nach z komplex diffbar mit Ableitung $\frac{\partial f}{\partial z}(\zeta, z)$, die auf $\Gamma \times M$ stetig ist, dann ist auch F komplex diffbar mit Ableitung $F'(z) = \int_\nu \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta, z)\, d\zeta$

BEWEIS

(i) Sei $\bar{x} \in M$ ein fester Punkt und $\overline{\mathcal{B}_r}(\bar{x}) \subset M$ eine abgeschlossene Kugel mit Radius r um $\bar{x}$. Dann ist $\Gamma \times \overline{\mathcal{B}_r}(\bar{x})$ kompakt.
f ist also auf $\Gamma \times \mathcal{B}_r(\bar{x})$ gleichmäßig stetig.
Für $0 < \varepsilon < r$ können wir das Folgenkriterium Satz A.2 anwenden.

$\boxtimes$

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x_\nu}$ ist analog auf $\Gamma \times \overline{\mathcal{B}_r}(\bar{x})$ gleichmäßig stetig.
Nach dem Mittelwertsatz existiert zu $\varepsilon > 0$ daher ein $\delta > 0$, so dass für alle h mit $0 < |h| < \delta$ für den Differenzenquotienten

$$\left| \frac{f(\zeta, \bar{x} + he_i) - f(\zeta, \bar{x})}{h} - \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\zeta, \bar{x}) \right| \leq \varepsilon$$

gilt. Also

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(\bar{x} + he_i) - F(\bar{x})}{h} = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\zeta, \bar{x})\, d\zeta$$

(iii) Die komplexe Differenzierbarkeit lässt sich mit Hilfe der Cauchy-Riemann DGL'n auf eine Aussage über reelle Diffbarkeit zurückführen.
(iii) folgt somit aus (ii).

$\boxtimes$

2016-05-02
(4)

5. Fundamentale Eigenschaften holomorpher Funktionen

Wir werden in diesem § die fundamentalen Eigenschaften aus der Cauchy-Integralformel herleiten.

5.1 Satz (Cauchysche Integralformel)

Sei $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph auf Gebiet G. $\mathcal{D} \subset G$ abgeschlossene Kreisscheibe, $z \in \mathring{\mathcal{D}}$. Dann $\quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, dz$

Der Integrant $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$ ist auf $\partial \mathcal{D} \times \mathring{\mathcal{D}}$ nach z beliebig oft komplex diffbar

mit $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f(\xi)}{\xi - z}\right) = \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}$, $\frac{\partial^n}{(\partial z)^n}\left(\frac{f(\xi)}{\xi - z}\right) = n! \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}$

Es folgt aus A.3 (iii)

5.2 Satz

Ist $f: G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet, $\mathcal{D} \subset G$ abg. Kreisscheibe $z \in \mathring{\mathcal{D}}$. Dann ist f beliebig oft komplex diffbar und

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{D}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \, d\xi$$

☒

5.3 Korollar

Holomorphe Funktionen sind beliebig oft komplex diffbar.
Insbesondere ist $f': G \to \mathbb{C}$ stetig.

BEWEIS

Zu $z \in G$ Gebiet $\exists \, \mathcal{D}$ mit $z \in \mathring{\mathcal{D}} \subset \overline{\mathcal{D}} \subset G$

☒

5.4 Satz (Morera)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \to \mathbb{C}$ stetig.
Gilt für jedes abg. $\Delta \subset G$, dass $\int_{\partial \Delta} f(z) dz = 0$, dann ist f holomorph auf G.

BEWEIS

Wir können G durch eine konvexe Umgebung eines Punktes $z \in G$ ersetzen, um die komplexe Diffbarkeit in z zu testen. Nach Satz 3.15 hat f in diesem konvexen Gebiet eine Stammfunktion F. Nach Korollar 5.3 ist die Ableitung $f = F'$ ebenfalls holomorph

$\boxtimes$