2016-06-02 BEWEIS

Betrachte $F(z) = \begin{cases} (z - z_0) f(z) & \text{für } z \neq z_0 \\ 0 & \text{für } z = z_0 \end{cases}$

Da $f$ beschränkt, ist $F$ stetig in $z_0$ und holomorph außerhalb von $z_0$.

Nach Satz nach Morera ist $F$ dann holomorph.

$F$ hat dann die Gestalt $F(z) = F(z_0) + \sum_{n \geq 1} a_n (z-z_0)^n$

Wegen $F(z_0) = 0$ ist dann $g(z) := \sum_{n\geq 1} a_n (z-z_0)^{n-1}$ eine holomorphe Funktion mit

$g(z) = f(z)$ für $z \neq z_0$.

□

## 9.3 Beispiele

1) Für $f, g : G \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen, $g \not\equiv 0$, dann hat $\frac{f}{g}$ nahe $z_0 (\in G)$ einen Pol oder eine hebbare Singularität.

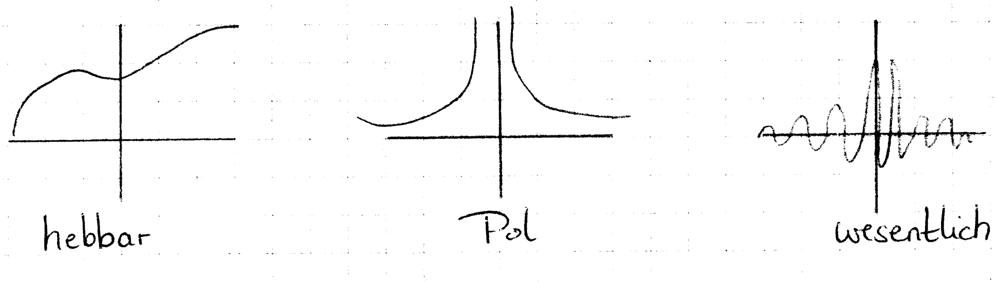
Schreiben wir nämlich $g(z) = (z-z_0)^n \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n+\nu} (z-z_0)^\nu$ mit $a_n \neq 0$, dann ist

$h(z) = \left( \sum_{\nu=2}^{\infty} a_{n+\nu} (z-z_0)^\nu \right)^{-1}$ holomorph nahe $z_0$.

Daher $f/g(z) = (z-z_0)^{-n} \cdot f(z) \cdot h(z)$ mit $f \cdot h$ holomorph.

Genauer gilt: Die Polstellenordnung von $f/g$ in $z_0$ ist die Differenz von Nullstellenordnung von $g$ mit der Nullstellenordnung von $f$ in $z_0$.

2) Die Funktion $z \mapsto \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ hat in $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität, da sich die Nullstellen um 0 häufen. Also kann kein $n \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $z^n \cdot \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ holomorph ist.




Für das Studium von isolierten Singularitäten sind Laurentreihen ein wesentliches Hilfsmittel.

## 9.4 Definition

Eine **Laurentreihe** um 0 ist eine Reihe der Form $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$.

Dabei heißt $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} \left(\frac{1}{z}\right)^k$ der **Hauptteil** der Laurentreihen und

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ heißt der **Nebenteil**

Die Laurentreihe heißt konvergent, falls Haupt- und Nebenteil konvergieren.

## 9.5 Satz

Sei $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ eine Laurentreihe.

Dann existiert $r, R \in [0, \infty$ so, dass $f$ auf dem Kreisringgebiet $\{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$ lokal glm gegen eine holomorphe Funktion konvergiert und außerhalb, also auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r \text{ oder } |z| > R\}$ divergiert.

BEWEIS

Den Hauptteil können wir als Potenzreihe in $\frac{1}{z}$ auffassen $\left(\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n\right)$

Ist $\tilde{R}$ der Konvergenzradius, so konvergiert der Hauptteil in dem Kreisaußengebiet $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > r\}$, $r = \frac{1}{\tilde{R}}$, und divergiert im Inneren

Der Nebenteil ist eine gewöhnliche Potenzreihe.

Ist $R$ der KR, so gilt, das Haupt- und Nebenteil in $\{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$ konvergieren

Der HT divergiert in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$

Der NT " " $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$

Die Funktion $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ ist holomorph als Summe holomorpher Funktionen.

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

$$f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$\boxtimes$

## 9.6 Satz

Die Ableitung einer konvergenten Laurentreihe $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ ist durch $f'(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \cdot c_n z^{n-1}$ gegeben.

$f$ hat genau dann eine Stammfunktion auf dem Kreisringgebiet, wenn $c_{-1} = 0$.

BEWEIS

Für Potenzreihen ist das Vertauschen von Ableitung mit Summieren bekannt.

Für den Hauptteil folgt mit der Kettenregel:

$$* = \left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}$$

$$f_2'(z) = -f_2'\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_{-1} \underbrace{\left(\frac{1}{z}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{z^2}}_{*}$$

Ist $c_{-1}=0$, so ist offenbar $F(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}z^{n+1}$ eine Stammfunktion.

$c_{-1}=0$ ist auch notwendig. Denn für $\partial\mathcal{D}_\delta(0)$, $r<\delta<R$, gilt:

$$\int_{\partial\mathcal{D}_\delta(0)} f(z)\,dz = \int_{\partial\mathcal{D}_\delta}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n\,dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{\partial\mathcal{D}_\delta} c_n z^n\,dz = 2\pi i c_{-1}$$

wegen der lokal glm Konvergenz und da alle anderen Terme wegfallen, hat $f$ also genau dann eine Stammfunktion, wenn $c_{-1}=0$.

## 9.7

Analog können wir Laurentreihen $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ für beliebiges $z_0\in\mathbb{C}$ betrachten.
Das Konvergenzgebiet ist dann der Kreisring $K_{z_0}(r,R):=\{z\in\mathbb{C}\mid r<|z-z_0|<R\}$

## 9.8 Satz

Sei $f$ eine in dem Kreisringgebiet $K_{z_0}(r,R)$ ($z_0$ = Mittelpunkt) holomorphe Funktion.
Für $r<\delta<R$ betrachten wir den Kreisrand $\partial\mathcal{D}_\delta(z_0)$ und die Koeffizienten

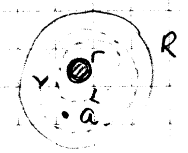
$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{D}_\delta(z_0)}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\,,\quad n\in\mathbb{Z}$$

Dann konvergiert die Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ in $K_{z_0}(r,R)$ gegen $f$.

BEWEIS

Da $\partial\mathcal{D}_\delta(z_0)-\partial\mathcal{D}_{\delta'}(z_0)$ für $r<\delta<\delta'<R$ nullhomolog ist in $K_{z_0}(r,R)$, hängt $c_n$ nicht von der Wahl von $\delta$ ab.

Sei $a\in K_{z_0}(r,R)$. Dann gilt $n(\partial\mathcal{D}_\delta(z_0)-\partial\mathcal{D}_{\delta'}(z_0),a)=1$




Da $\partial\mathcal{D}_\delta(z_0)-\partial\mathcal{D}_{\delta'}(z_0)$ nullhomolog in $K_{z_0}(r,R)$ ist, folgt mit der allgemeinen Cauchy-Integralformel (7.10):

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{D}_\delta}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)}\,d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{D}_{\delta'}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)}\,d\zeta$$

$\delta=|\zeta-z_0|>|a-z_0|$, dann ist

$$\frac{1}{\zeta-a}=\frac{1}{1-\underbrace{\frac{a-z_0}{\zeta-z_0}}_{<1}}\cdot\frac{1}{\zeta-z_0}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$$

Für $\delta'=|\zeta-z_0|<|a-z_0|$, analog

$$\frac{1}{\zeta-a}=\frac{1}{1-\frac{\zeta-z_0}{a-z_0}}\cdot\frac{(-1)}{a-z_0}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^n}{(a-z_0)^{n+1}}$$

Vertauschung von Summation und Integration liefert

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \Big( \int_{\partial D_\delta(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \Big)(a-z_0)^n + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \Big( \int_{\partial D_{\delta'}(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{-n}} \Big)(a-z_0)^{-n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (a-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_{-n-1} (a-z_0)^{-n-1}$$

☒

## 9.9 Satz (Cauchy-Ungleichung für Laurentreihen)

Sei $f$ holomorph in einer Umgebung von $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| = \delta\}$ und sei $|f(z)| \leq \mu \ \forall z$ mit $|z-z_0| = \delta$.

Dann gilt $|c_n| \leq \frac{\mu}{\xi^n}$ $(n \in \mathbb{Z})$

BEWEIS: siehe Potenzreihen ☒

## 9.10 Beispiele

1) Wir betrachten $\frac{1}{z(1-z)}$ in dem Kreisringgebiet $K_0(0,1)$. In diesem Gebiet ist $f$ holomorph und hat Laurententwicklung

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{(1-z)} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n$$

2) In dem Kreisringgebiet $K_0(1,\infty)$ hat $f$ die Laurentreihenentwicklung

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{(1-z)} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{z} - 1} = -\frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=-\infty}^{-2} z^n$$

## 9.11 Bemerkung

Sei $z_0$ eine isolierte Singularität von $f: G \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$.

Dann existiert ein $R > 0$, sodass $f|_{K_{z_0}(0,R)}$ holomorph ist.

Sei $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ die Laurenentwicklung von $f$ in $K_{z_0}(0,R)$.

Dann gilt:

1) $f$ hat eine hebbare Singularität genau dann, wenn $c_n = 0 \ \forall n < 0$
2) $f$ hat einen Pol der Ordnung $-N$ genau dann, wenn $c_n = 0 \ \forall n < N$ und $c_N \neq 0$
3) $f$ hat eine wesentliche Singularität genau dann, wenn $c_n \neq 0$ für $\infty$-viele $n < 0$

Die Reihe $h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n$ heißt **Hauptteil** von $f$ in $z_0$.

## 9.12 Satz (Casorati-Weierstraß)

Sei $z_0$ eine wesentliche Singularität von $f$ und $\varepsilon > 0$, so dass die gelochte $\varepsilon$-Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ im Definitionsbereich von $f$ liegt.

Dann ist das Bild $\{f(z) \mid 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ der gelochten $\varepsilon$-Kreisscheibe dicht in $\mathbb{C}$.

BEWEIS

Angenommen es gibt eine offene Kreisscheibe $W = \{w \mid |w - w_0| < \delta\} \subset \mathbb{C}$, die keinen Punkt des Bildes enthält. Dann ist $g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0}$ durch $|g(z)| = \frac{1}{\delta}$ beschränkt.

Nach der Cauchy-Ungleichung für Laurentreihen ist dann $|c_n| \leq \frac{1}{\delta^{n+1}}$

Für $n < 0$ und $\delta \longrightarrow 0$ folgt $c_n = 0 \ \forall n < 0$.

Also $g(z)$ hat eine hebbare Singularität in $z_0 \Rightarrow f(z) = \frac{1}{g(z)} + w_0$ eine hebbare Singularität oder einen Pol ϟ

$\boxtimes$