Diskrete Untergruppen von $(\mathbb{C},+)$ lassen sich leicht klassifizieren.

15.3 Satz

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine diskrete Untergruppe.
Dann trifft eine der folgenden Aussagen zu:

0) $\Omega = \{0\}$

1) $\Omega = \{nw \mid n \in \mathbb{Z}\}$, $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

2) $\Omega = \{n_1 w_1 + n_2 w_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$, wobei $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$
   $\mathbb{R}$-linear unabhängig sind

Man spricht dann entsprechend von Untergruppen vom Rang 0, 1 bzw. 2.
Diskrete Untergruppen von Rang 2 nennt man auch Gitter

Beweis: später!

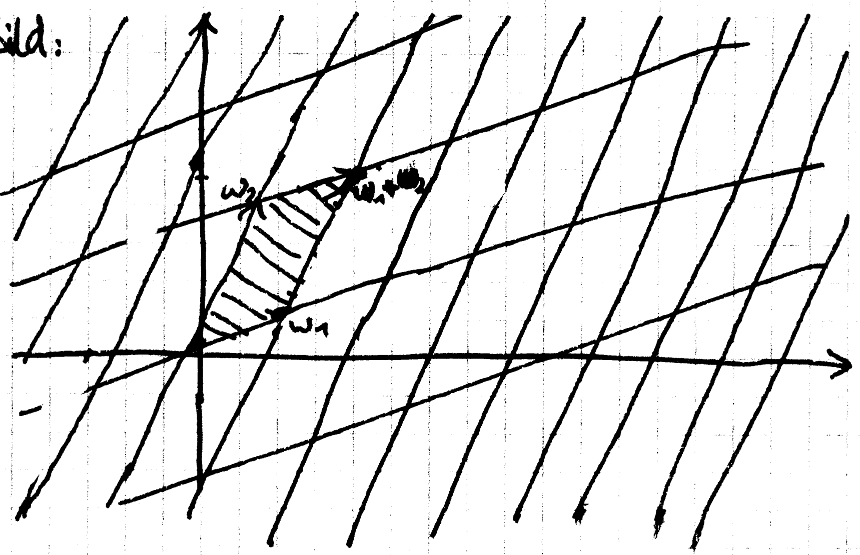
15.4 Definition

Eine diskrete Untergruppe Ω von Rang 2 nennt man ein Gitter (in $\mathbb{C}$)
Eine elliptische Funktion f zum Periodengitter ist eine meromorphe Funktion, die

$$f(z+w) = f(z) \quad \forall\, w \in \Omega$$

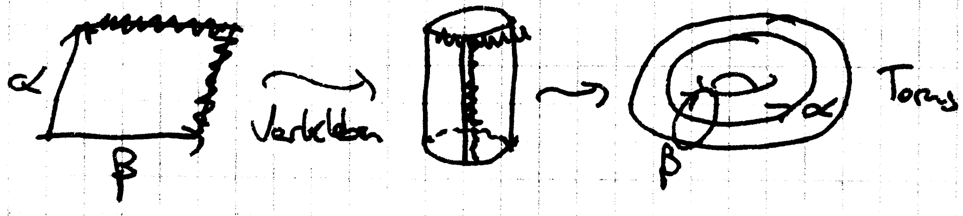
erfüllt

Bild:



$\mathbb{C}/\Omega$ Quotientengruppe

$P=\{\varrho_1 w_1+\varrho_2 w_2 \mid 0\le \varrho_1,\varrho_2<1\}$ halboffenes Parallelogramm



Beweis von Satz 15.3:

- $w_1, w_2 \in \Omega$ $\mathbb{R}$-linear unabh.

  $\Longrightarrow$ w_1, w_2 sind $\mathbb{Q}$-linear unabhängig, beide Vielfache eines $w \in \mathbb{R}w_1$ mit $|w|$ minimal

w_1, w_2 $\mathbb{R}$-linear unabh.:

$\Omega' = \{n_1 w_1 + n_2 w_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\} \subset \Omega$

Untergruppe eines Gitters

Ω/Ω' ist endlich, da sonst Ω ein HP hätte, da $\mathbb{C}/\Omega'$ kompakt ist.

Genaueres und weiteres ist Übungsaufgabe. etwas Ana, etwas LinAlg

15.5 Satz

Die elliptische Funktion zu einem festen Periodengitter Ω bilden einen Körper $K(\Omega)$.
Mit $f \in K(\Omega)$ ist auch $f' \in K(\Omega)$

Beweis: klar!

$\square$

15.6 Satz

Jede holomorphe elliptische Funktion ist konstant.

Beweis: Es seien ω_1, ω_2 Erzeuger des Periodengitters und
$$\overline{P} = \{ \varrho_1 \omega_1 + \varrho_2 \omega_2 \mid 0 \leq \varrho_1, \varrho_2 \leq 1 \}$$
das abgeschlossene Parallelogramm.

Eine elliptische Funktion nimmt jeden Wert den sie überhaupt annimmt in $P \subset \overline{P}$ an.

Da $\overline{P}$ kompakt und holomorphe elliptische Funktionen stetig sind, nimmt $|f|$ ein Maximum an, und ist daher konstant.

$\square$

15.7 Satz

Sei f eine elliptische Funktion und P das halboffene Parallelogramm.
Sind $a_1, \dots, a_k$ die Pole von f in P, dann gilt:
$$\sum_{\nu=1}^{k} \operatorname{Res}_{a_\nu}(f) = 0.$$

Beweis: Wir nehmen zunächst an, dass kein Pol auf dem Rand ∂P des Periodendiagramms liegt.

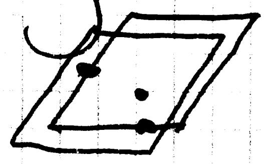
Nach dem Residuensatz gilt:

$$2\pi i \sum_{\nu=1}^{k} \mathrm{Res}_{a_\nu}(f) = \int_{\partial P} f(\xi)\,d\xi$$

$$= \int_{[0,w_1]} f(\xi)\,d\xi + \int_{[w_1,w_1+w_2]} f(\xi)\,d\xi + \int_{[w_1+w_2,w_2]} f(\xi)\,d\xi + \int_{[w_2,0]} f(\xi)\,d\xi$$

$$= \int_{[0,w_1]} f(\xi)\,d\xi + \int_{[0,w_2]} f(\xi)\,d\xi - \int_{[0,w_1]} f(\xi)\,d\xi - \int_{[0,w_2]} f(\xi)\,d\xi$$

Liegen Pole auf ∂P, so verschieben wir das Parallelogramm



Ersetzen P durch

$b+P = \{b+z \mid z \in P\}$ (mit $0<|b|\ll 1$,)

sodass kein Pol auf $\partial(b+P)$ liegt und integrieren über $\partial(b+P)$.

15.8 Corollar

Hat eine elliptische Funktion auf dem Residuenparallelogramm höchstens einen Pol der Ordnung 1, dann ist sie konstant.

Beweis: Das Residuum in dem möglichen Pol ist 0, also f ist also holomorph und damit konstant. $\square$

15.9 Satz

Eine nicht konstante elliptische Funktion nimmt jeden Wert $a \in \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ im halboffenen Periodendiagramm mit Vielfachheit gezählt gleich oft an.

Beweis: Mit f ist auch $\frac{f'}{f}$ elliptisch.

Die Residuen von $\frac{f'}{f}$ sind die Nullstellen bzw. Polstellenordnungen.

Also hat f genauso viele Nullstellen wie Polstellen nach 15.7.

Für $a \in \mathbb{C}$ können wir f durch $f-a$ ersetzen und erhalten, dass auch die Anzahl der a-Stellen gleich der Anzahl der Polstellen ist.

15.10

Wir konstruieren nun eine nicht konstante elliptische Funktion. Also einfache Kandidaten können sein:

1) Eine Funktion mit einem einzigen Pol 2-ter Ordnung und Residuum 0

2) Eine Funktion mit 2 Polen erster Ordnung und Residuensumme Null in Frage.

Wir konstruieren eine Funktion von erstem Typ.
Als Polstelle wählen $0 \in P$.
Dann ist der Hauptteil in 0 $\frac{1}{z^2}$, da das Residuum 0 ist.

Wegen der Periodizität hat die Funktion in allen Punkten $\omega \in \Omega$ den Hauptteil $\frac{1}{(z-\omega)^2}$.

15.11 Satz

Die Funktion
$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum{}' \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$
ist eine elliptische Funktion,
wobei $\sum{}'$ andeutet, dass wir über $\sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}}$ summieren.
($\wp$ nennt man die Weierstraß'sche $\wp$-Funktion)

Beweis: 1.) Zunächst zeigen wir die kompakte Konvergenz der Partialbruchreihe.
Es sei $|z| \leq R$.
Fast alle $\omega \in \Omega$ erfüllen $|\omega| \geq 2R$.
Für diese ω gilt:
$$\left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| = \frac{|z| \cdot |2\omega - z|}{|\omega|^2 \, |z-\omega|^2} \leq \frac{R \, 3|\omega|}{|\omega|^2 \left|\frac{\omega}{2}\right|^2}$$
$$\leq \text{const} \cdot \frac{1}{|\omega|^3}$$

Es reicht also $\sum{}' \frac{1}{|\omega|^3} < \infty$ zu zeigen.

2.) Es seien ω_1, ω_2 Erzeuger des Gitters Ω,
also $\Omega = \{ n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \}$
Durch $f(1) = \omega_1$ und $f(i) = \omega_2$ und eine

$\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert

f ist bijektiv und die Umkehrabbildung ist stetig.

Es gibt daher eine Konstante c, sodass

$$|n_1 w_1 + n_2 w_2| = |f(n_1 + in_2)| \geq c\,|n_1 + in_2|$$

Also $\sum' \frac{1}{|w|^3} \leq \text{const} \sum_{(n_1,n_2) \neq (0,0)} \frac{1}{(n_1^2 + n_2^2)^{3/2}}$

und es genügt die Konvergenz dieser Reihe zu zeigen.

Sei Q_n das Quadrat mit Kantenlänge $2n$ und Mittelpunkt 0.

Die Anzahl der Punkte $n_1 + in_2$, $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ mit $n_1 + in_2 \in \partial Q_n$ ist $8n$.

Also: $S_n = \sum_{n_1 + in_2 \in \partial Q_n \cap \mathbb{Z}[i]} \frac{1}{(n_1^2 + n_2^2)^{3/2}} \leq 8n \frac{1}{n^3} = 8 \frac{1}{n^2}$

Die Reihe

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} 8 \frac{1}{n^2} < \infty$$

und die absolute Konvergenz von $\sum' \frac{1}{|w|^3}$ folgt nach dem Majorantenkriterium

3) $\wp$ ist also eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$.

Um die Periodizität einzusehen, betrachten wir die Ableitung

$$\wp'(z) = -2\frac{1}{z^3} + (-2) \sum' \frac{1}{(z-w)^3} = -2 \sum_{w \in \Omega} \frac{1}{(z-w)^3}$$

Da die Reihe für $\wp'(z)$ auch absolut konvergiert, können wir umordnen.

$\wp'$ ist somit offensichtlich Ω-periodisch

Also: $\wp'(z+w) = \wp'(z) \quad \forall w \in \Omega$

Ist nun $w_0 \in \Omega$, so gilt:

$$\frac{d}{dz}\left(\wp(z+w_0) - \wp(z)\right) = \wp'(z+w_0) - \wp'(z) = 0$$

Also

$\wp(z+w_0) - \wp(z) = c$ ist eine konstante Funktion

Setzen wir speziell $z = -\frac{w_0}{2}$, so sehen wir

$$\wp\left(\frac{w_0}{2}\right) - \wp\left(-\frac{w_0}{2}\right) = c$$

Speziell für $w_0 = w_1$ oder $w_1 = w_2$ hat $\wp$ in $\frac{w_0}{2}$ keine Polstelle.

Ferner: $\wp$ ist offenbar eine gerade Funktion

$$\wp(-z) = \wp(z),$$

da mit $w \in \Omega$ auch $-w \in \Omega$

Es folgt $c = 0$ für $w_0 = w_1$ oder $w_0 = w_2$ und damit $\wp(z+w_1) = \wp(z)$, $\wp(z+w_2) = \wp(z)$, $\wp(z + n_1 w_1 + n_2 w_2) = \wp(z)$ folgt mit Induktion, damit $\wp$ also Ω-periodisch.

$\square$