1) f hat eine hebbare Singularität genau dann, wenn $c_n = 0$ $\forall n \leq 0$

2) f hat einen Pol der Ordnung N genau dann, wenn $c_n = 0$ $\forall n < -N$ und $c_{-N} \neq 0$

3) f hat eine wesentliche Singularität genau dann, wenn $c_n \neq 0$ für unendlich viele $n < 0$.

Die Reihe $h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n$ heißt Hauptteil von f in z_0

9.12. Satz (Casorati-Weierstraß)

Sei z_0 eine wesentliche Singularität von f und $\varepsilon > 0$, sodass die gelochte ε-Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-z_0| < \varepsilon\}$ im Definitionsbereich von f liegt.
Dann ist das Bild $\{f(z) \mid 0 < |z-z_0| < \varepsilon\}$ über der gelochten ε-Kreisscheibe dicht in $\mathbb{C}$.

Beweis: Angenommen es gibt eine offene Kreisscheibe
$W = \{w \mid |w-w_0| < \delta\} \subset \mathbb{C}$
die keinen Punkt des Bildes enthält.

Dann ist $g(z) = \frac{1}{f(z)-w_0}$ durch $|g(z)| \leq \frac{1}{\delta}$ beschränkt.

Nach der Cauchy-Ungleichung für Laurentreihen ist dann $|c_n| \leq \frac{1}{\delta r^n}$.
Für $n < 0$ und $\delta \to 0$ folgt $c_n = 0$ $\forall n < 0$

R. Hebb.-satz
$\Rightarrow g(z)$ hat eine hebbare Singul. in z_0
$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{g(z)} + w_0$ hat eine hebbare Singularität oder einen Pol $\lightning$

10. Der Residuensatz

10.1 Definition

Eine holomorphe Funktions bis höchstens isolierte Singularitäten auf einem Gebiet G ist eine Funktion $f: G \setminus P \to \mathbb{C}$, wobei $P \subset G$ eine diskrete Teilmenge von G ist, d.h. keine Häufungspunkte in G ~~hat~~ und P ist höchstens ~~abzählbar~~.

10.2 Definition

Sei f eine holomorphe Funktion mit höchstens isolierten Singularitäten auf einem Gebiet G und $z \in G$.
Das Residuum von f in z ist

$$\mathrm{Res}_z f := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon(z)} f(\xi)\, d\xi = a_{-1},$$

wobei $\varepsilon < \varepsilon \ll 1$ und a_{-1} ist (-1)-te Koeffizient von

$$f(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (w-z)^n$$

der Laurentreihe von f in $D_\varepsilon(z) \setminus \{z\}$.

Da f höchstens isolierte Singularitäten hat, ist für $0 < \varepsilon \ll 1$ z die einzige mögliche Singularität von f in $D_\varepsilon(z)$ und der Wert a_{-1} des Integrals ergibt sich aus der Cauchy'schen Integralformel.

10.3 Beispiele und Bemerkungen

1) $\frac{1}{z-a}$ hat in a das Residuum 1.

2) Hat f in z_0 einen Pol erster Ordnung, dann gilt $\text{Res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)$,

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

3) Hat f in z_0 einen Pol der Ordnung 1 und ist g holomorph in z_0, dann gilt

$$\text{Res}_{z_0} (g \cdot f) = g(z_0) \cdot \text{Res}_{z_0}(f)$$

4) Hat f in z_0 einen Pol n-ter Ordnung, so hat $g(z) = (z-z_0)^n f(z)$ in z_0 eine hebbare Singularität, dann gilt

$$\text{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(n-1)!} g^{(n-1)}(z_0).$$

5) Residuen in Punkten z_0, wo f eine wesentliche Singularität hat, sind schwieriger

10.4 Definition

Sei f eine holomorphe Funktion mit höchstens isolierten Singularitäten auf einem Gebiet.
Sind sämtliche Singularitäten Pole, dann nennt man f meromorph auf G.

Bemerkung (Übung): Die Menge $M(G)$ der meromorphen Funktionen auf einem Gebiet G bildet einen Körper.

10.5 Satz (Residuensatz)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, f eine holomorphe Funktion auf G mit höchstens isolierten Singularitäten.
Dann gilt für jeden in G nullhomologen Zyklel Γ, auf dessen Spur keine der Singularitäten von f liegt

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{z \in G} n(\Gamma, z) \operatorname{Res}_z(f)$$

Bemerkung: Da die Singularitäten von f in G liegen, gibt es nur endlich viele Punkte $z \in G$ mit $\operatorname{Res}_z f \neq 0$ und $n(\Gamma, z) \neq 0$.
Die Summe rechts ist also endlich.

Beweis: Sei Γ wie im Satz und $z_1, \dots, z_m$ die Singularitäten von f mit $n(\Gamma, z_j) \neq 0$.

Sei $M \subset G$ die übrigen Singularitäten von f.

Dann ist Γ nullhomolog in $G \setminus M$, da Γ nullhomolog in G ist.

Sei $h_\mu(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{\mu n} (z - z_\mu)^n$
der Hauptteil der Laurententwicklung von f im Punkt z_μ.
h_μ ist in $\mathbb{C} \setminus \{z_\mu\}$ konvergent und holomorph

$f(z) - \sum_{\mu=1}^{m} h_\mu(z)$ ist dann auf $G \setminus M$ holomorph.

Da Γ in $G \setminus M$ nullhomolog ist, folgt aus dem Cauchy'schen Integralsatz:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{\mu=1}^{m} \int_\mu h_\mu(z)\,dz$$

Nun ist $\int_\Gamma h_\mu(z)\,dz = \sum_{n=-\infty}^{-1} \int_\mu a_{\mu n}(z-z_\mu)^n dz$

$$= \int_\Gamma a_{\mu-1}(z-z_\mu)^{-1}\,dz$$

$$= 2\pi i \operatorname{Res}_z f\, n(\Gamma, z_\mu)$$

Also $\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\mu=1}^{m} n(\Gamma, z_\mu) \operatorname{Res}_{z_\mu} f$
wie behauptet

$\square$

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit Anwendungen des Residuensatzes in der reellen Analysis:

10.6

Integrale der Form

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t))\,dt,$$

wobei $R(x,y)$ eine rationale Funktion von x und y ist, sodass $R(\cos(t), \sin(t))$ für alle t definiert ist.

$e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$, $e^{-it} = \cos(t) - i\sin(t)$ nach sinus und cosinus aufgelöst:

$\cos(t) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$, $\sin(t) = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$

Das Integral lässt sich daher als Kurvenintegral über $\partial D_1(0)$ integrieren:

$z = e^{it}$, $\frac{dz}{z} = \frac{i e^{it} dt}{e^{it}} = i\,dt$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t))\,dt = \frac{1}{i} \int_{\partial D_1(0)} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{dz}{z}$$

$$= 2\pi \sum_{|z|<1} \operatorname{Res}_z \left(R\left(\frac{1}{2}(\xi + \xi^{-1}), \frac{1}{2i}(\xi - \xi^{-1})\right)\xi^{-1}\right)$$

10.7 Beispiele

1.) $a > 1$:

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{a+\cos(t)}\, dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos(t)}\, dt$$

$$= \frac{1}{2i} \int_{|z|=1} \left(a+\frac{1}{2}(z-z^{-1})\right)^{-1} \frac{dz}{z}$$

$$= \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z^2+2az+1}\, dz$$

$$= 2\pi \operatorname{Res}_{z_1} \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

$$= 2\pi \frac{1}{(z_1-z_2)} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

wobei $z_1 = -a + \sqrt{a^2-1} \in D_1(0)$

$z_2 = -a - \sqrt{a^2-1} \notin D_1(0)$

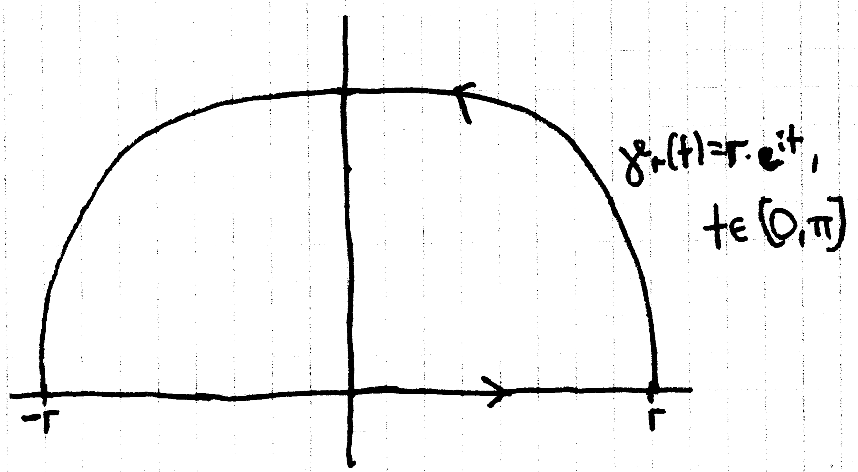
$\square$

10.8 Satz

Sei $R(z)$ eine rationale Funktion, die auf $\mathbb{R}$ keine Pole hat mit Nennergrad $\geq 2 +$ Zählergrad.

Dann gilt: $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, dx = 2\pi i \cdot \sum_{\operatorname{Im}(z) > 0} \operatorname{Res}_z R(z)$

Beweis:



Residuensatz

$$\int_{[-r,r]} R(x)\,dx + \int_{\gamma_r} R(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(\xi)>0} \mathrm{Res}_\xi f(\xi),$$

falls r so groß gewählt werden, dass alle Pole von f im Inneren des Halbkreis liegen

Für $|z|$ groß, ist $|R(z)| \le c|z|^{-2}$ wegen der Gradbedingung an Nenner und Zähler.

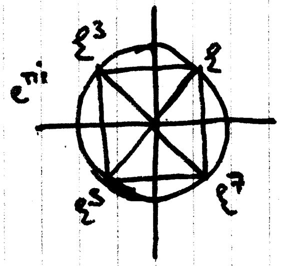
Also:

$$\left|\int_{\gamma_r} R(z)\,dz\right| \le c\cdot \gamma^{-2}\cdot\pi\cdot r = \frac{c\pi}{r} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

10.9 Beispiel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Beweis: Die Pole sind $\xi = \underbrace{e^{\pi i/4}}_{=\frac{1+i}{\sqrt{2}}},\ \xi^3,\ \xi^5,\ \xi^7$



Davon liegen ξ und ξ^3 in der oberen Halbebene.

Also: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = 2\pi i \left(\mathrm{Res}_\xi\left(\frac{z^2}{1+z^4}\right) + \mathrm{Res}_{\xi^3}\left(\frac{z^2}{1+z^4}\right)\right)$

$$\left[\begin{array}{l} z^4+1 = (z-\xi)\cdot(z-\xi^3)\cdot(z-\xi^5)\cdot(z-\xi^7) \\ z^8-1 = (z^4+1)\cdot(z^4-1) \end{array}\right]$$

$$= 2\pi i \left[\frac{\xi^2}{(\xi-\xi^3)(\xi-\xi^5)(\xi-\xi^7)} + \frac{\xi^6}{(\xi^3-\xi)(\xi^3-\xi^5)(\xi^3-\xi^7)}\right]$$

$$= 2\pi i \left[\frac{i}{\sqrt{2} \cdot ((1+i)\sqrt{2})(i\sqrt{2})} + \frac{-i}{-\sqrt{2} \cdot (i\sqrt{2})(1-i)\sqrt{2}} \right]$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i} \right)$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(\frac{1-i+(1+i)}{2} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$