2016-07-07 **15.12**

Als nächstes bestimmen wir die Laurententwicklung von $\wp$ um 0.

Für $w \neq 0$ gilt $\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} = \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\nu z^{\nu-1}}{w^{\nu+1}}$ für $|z| < |w|$

In der Tat:

$$\frac{1}{z-w} = -\frac{1}{w} \underbrace{\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^{\nu}}_{\frac{1}{1-\frac{z}{w}}}$$

Ableiten ergibt:

$$\frac{-1}{(z-w)^2} = -\frac{1}{w} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \left(\frac{z^{\nu-1}}{w^{\nu}}\right) = -\frac{1}{w^2} - \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu \frac{z^{\nu-1}}{w^{\nu+1}}$$

Es folgt:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w}{}' \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\nu \cdot z^{\nu-1}}{w^{\nu+1}} = \frac{1}{z^2} + \sum_{\nu=2}^{\infty} \Big(\nu \sum_{w}{}' \frac{1}{w^{\nu+1}}\Big) z^{\nu-1},$$

da die Reihen absolut konvergieren.

Da mit $w \in \Omega$ auch $-w \in \Omega$ $\sum_{w}{}' \frac{1}{w^{\nu+1}} = 0$ für ν gerade

$\Rightarrow \wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{2\nu} z^{2\nu}$ nach Umbenennung des Summationsindex

mit $c_{2\nu} = (2\nu+1) \sum' \frac{1}{w^{2\nu+2}}$.

Also $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + c_2 z^2 + c_4 z^4 + \ldots$

Es folgt:

$$\wp(z)^3 = \frac{1}{z^6} + \frac{3c_2}{z^2} + 3c_4 + \text{höhere Terme}$$

$$\wp'(z) = \frac{-2}{z^3} + 2c_2 z + 4c_4 z^3 + \text{höhere Terme}$$

$$(\wp'(z))^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{8c_2}{z^2} - 16c_4 + \text{höhere}$$

Die elliptische Funktion $f(z) = \wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 20c_2\wp(z) + 28c_4$

hat im Nullpunkt eine Nullstelle und im halboffenen Periodenparallelogramm

keine weiteren Pole.

$\Rightarrow f \equiv 0$.

Dies zeigt folgenden Satz:

15.13 Satz (Differentialgleichung der $\wp$-Funktion)

Die Weierstraßsche $\wp$-Funktion erfüllt $(\wp'(z))^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$,

wobei $g_2 = 60 \cdot \sum' \frac{1}{\omega^4}$, $g_3 = 140 \sum' \frac{1}{\omega^6}$.

BEWEIS

$g_2 = 20c_2$ und $g_3 = 28c_4$ hat die angegebene Form. ☒

15.14

Um mehr Informationen über das Polynom $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$ zu bekommen, leiten wir die Differentialgleichung noch einmal anders her.

Da $\wp$ im Halbperiodenparallelogramm nur eine doppelte Polstelle bei Null hat, nimmt nach Satz 15.9 $\wp$ jeden Wert $a \in \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ genau zweimal an.

Ein Wert $\wp(z)$ wird doppelt angenommen ist genau dann, wenn $\wp'(z) = 0$.

Da $\wp'$ eine ungerade Funktion für $\Omega = \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \mid n_j \in \mathbb{Z}\}$ ist, hat $\wp'$ in den Punkten $\omega_1/2$, $\omega_2/2$ und $(\omega_1+\omega_2)/2$ Nullstellen

$$\wp'\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = \wp'\left(\frac{\omega_1}{2} - \omega_1\right) = \wp'\left(-\frac{\omega_1}{2}\right) = -\wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \Rightarrow \wp'\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = 0$$

Da $\wp'$ jeden Wert dreimal annimmt, haben wir mit

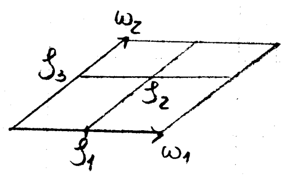
$$\varsigma_1 = \frac{\omega_1}{2}, \quad \varsigma_2 = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}, \quad \varsigma_3 = \frac{\omega_2}{2}$$

alle drei Nullstellen von $\wp'$ gefunden.

Es sei nun $e_\nu = \wp(\varsigma_\nu)$, $\nu = 1,2,3$

15.15 Satz

Es gilt: $\wp'(z)^2 = 4(\wp(z)-e_1)(\wp(z)-e_2)(\wp(z)-e_3)$ für $e_\nu = \wp(\varsigma_\nu)$



$\mathbb{C}/\Omega$
$\cup$
$\varsigma_\nu + \Omega$

BEWEIS

$f(z) = \wp'(z)^2 - 4(\wp(z)-e_1)(\wp(z)-e_2)(\wp(z)-e_3)$

hat einen Pol höchstens 4. Ordnung im Nullpunkt und ist sonst holomorph

2016-07-07 in $P = \{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \mid 0 \leq \lambda_1, \lambda_2 < 1\}$.

Andererseits hat f in den Punkten $\varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3$ jeweils wenigstens doppelte Nullstellen. Aber $3 \cdot 2 = 6 > 4 \Rightarrow f$ ist identisch Null. (mit Satz 15.9) $\boxtimes$

15.16 Korollar

Das Polynom $4x^3 - g_2 x - g_3$ hat nur einfache Nullstellen.

BEWEIS

Die Werte e_ν, $\nu = 1,2,3$, sind paarweise verschieden, da $\wp$ sonst einen Wert in $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit Vielfachheit > 2 annimmt. Es muss also

$$4x^3 - g_2 x - g_3 = 4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)$$

gelten, da andernfalls die Differenz ein Polynom $h \neq 0$ (vom Grad ≤ 2) wäre für dass $h(\wp(z)) \equiv 0$, d.h. $\wp$ würde konstant gleich einer der Nullstellen sein. Also

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0 \quad \text{und}$$
$$-4(e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3) = g_2$$
$$4 e_1 e_2 e_3 = g_3$$
$$\Delta = 16(e_1 - e_2)^2 (e_1 - e_3)^2 (e_2 - e_3)^2 = g_2^3 - 27 g_3^2 \neq 0$$ $\boxtimes$

15.17 Satz

Sei $\Omega = \{n_1 w_1 + n_2 w_2 \mid n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ ein Periodengitter und $\wp(z)$ die zugehörige Weierstraß'sche $\wp$-Funktion. Dann gilt:

1) Jede elliptische Funktion mit Gitter Ω ist eine rationale Funktion von $\wp$ und $\wp'$.

2) Der Körper $K(\Omega)$ der elliptischen Funktionen im Gitter Ω ist isomorph zu $\mathbb{C}(s)[t]/(t^2 - 4s^3 + g_2 s + g_3)$.

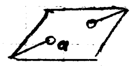
BEWEIS

1) Jede elliptische Funktion g lässt sich als Summe einer geraden und ungeraden Funktion darstellen $g(z) = \underbrace{\frac{g(z)+g(-z)}{2}}_{\text{gerade}} + \underbrace{\frac{g(z)-g(-z)}{2}}_{\text{ungerade}}$

Wir betrachten zunächst eine gerade elliptische Funktion f.

Sei $c \in \mathbb{C}$ ein Wert, der von f in keinem Punkt mehrfach angenommen wird.

Wegen $\quad c = f(a) = f(-a) = f(\omega_1 + \omega_2 - a)$



ist $a' = \omega_1 + \omega_2 - a$ ein weiterer Punkt, wo f den Wert c hat.

Die endlich vielen c-Stellen von f in P lassen sich also paarweise anordnen

$$a_1, a_1', \dots, a_k, a_k',$$

so dass $a_j' = \omega_1 + \omega_2 - a_j \in P$.

Ist $d \in \mathbb{C}$ ein weiterer Wert, der von f, der nur einfach angenommen wird, so können wir die d-Stellen analog anordnen

$$b_1, b_1', \dots, b_k, b_k'$$

mit $b_j' = \omega_1 + \omega_2 - b_j$.

Wir betrachten nun die meromorphe Funktion

$$g(z) = \frac{f(z)-c}{f(z)-d} \qquad \text{und} \qquad G(z) = \frac{(\wp(z)-\wp(a_1)) \cdot \ldots \cdot (\wp(z)-\wp(a_k))}{(\wp(z)-\wp(b_1)) \cdot \ldots \cdot (\wp(z)-\wp(b_k))}$$

Die Funktionen g, G haben die gleichen Nullstellen und Polstellen.

$\frac{g}{G}$ ist daher eine konstante elliptische Funktion.

Also $\quad \dfrac{f(z)-c}{f(z)-d} = g(z) = C \cdot \dfrac{(\wp(z)-\wp(a_1)) \quad (\wp(z)-\wp(a_k))}{(\wp(z)-\wp(b_1)) \ldots (\wp(z)-\wp(b_k))} \in \mathbb{C}(\wp)$

und somit auch

$$f(z) = \frac{d\,g(z)-c}{g(z)-1} \in \mathbb{C}(\wp)$$

2) Damit haben wir gezeigt, dass die Abbildung $\mathbb{C}(s) \to K(\Omega)$, $s \mapsto \wp$ eine Surjektion auf den Unterkörper der geraden elliptischen Funktion ist.

Diese ist ein Körperhomomorphismus, da $\wp$ nicht konstant.

Da sich ungerade elliptische Funktionen h in der Gestalt $h(z) = \wp'(z) f(z)$ darstellen lassen, mit f gerade, ist die Abbildung

$$\mathbb{C}(s) + t \cdot \mathbb{C}(s) \to K(\Omega), \quad \begin{matrix} s \mapsto \wp \\ t \mapsto \wp' \end{matrix} \quad \text{eine surjektive Abbildung,}$$

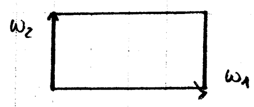
genauer bijektiv.

Also $\quad \mathbb{C}(s)[t] / t^2 - 4s^3 + g_2 s + g_3 \cong K(\Omega)$, da aus Gradgründen

$t^2 - 4\wp^3 + g_2 \wp + g_3$ das Minimalpolynom von $\wp'$ über $\mathbb{C}(\wp)$ ist. $\boxtimes$

15.18

Wir betrachten den Spezialfall eines Rechtecks,



also $\omega_1 \in \mathbb{R}_{>0}$, $\omega_2 = i\omega_2'$ mit $\omega_2' \in \mathbb{R}_{>0}$. In diesem Fall ist

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \Sigma' \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

für reelles z reellwertig, da mit $\omega \in \Omega$ auch $\overline{\omega} \in \Omega$.

Aus gleichem Grund sind $g_2 = 60 \, \Sigma' \frac{1}{\omega^4}$, $g_3 = 140 \, \Sigma' \frac{1}{\omega^6}$ reellwertig.

Ist nun $\mathfrak{f}_1 = \frac{\omega_1}{2}$, $e_1 = \wp(\mathfrak{f}_1)$, so gilt für $0 < x < \mathfrak{f}_1$

$$\wp(x) = \wp(-x) = \wp(-x + \omega_1)$$

Der Wert $\wp(x)$ wird also einmal in dem Intervall $]0, \mathfrak{f}_1[$ und einmal in dem Intervall $]\mathfrak{f}_1, \omega_1[$ angenommen.

Also $\wp$ bildet das halboffene Intervall $]0, \mathfrak{f}_1]$ auf $[e_1, \infty[$ ab, und zwar streng monoton fallend.

Die Umkehrfunktion $E : [e_1, \infty[\to]0, \mathfrak{f}_1]$ ist ebenfalls streng monoton fallend und für $u \neq e_1$ gilt:

$$E'(u) = \frac{1}{\wp'(x)} \quad \text{, falls } u = \wp(x)$$

Also wegen $\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2 \wp(z) - g_3$, folgt

$$E'(u) = \frac{-1}{\sqrt{4u^3 - g_2 u - g_3}}$$

Damit ist gezeigt:

15.19 Satz

Die Umkehrfunktion E von $\wp|_{]0, \mathfrak{f}_1]}$ ist eine Stammfunktion von $\frac{-1}{\sqrt{4u^3 - g_2 u - g_3}}$