Als Anwendung des Satzes von Morera zeigen wir die Holomorphie von Potenzreihen:

5.5 Satz

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit
mit Konvergenzradius $R>0$.
Dann ist f auf $D_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < R\}$ holomorph

Beweis: Die Konvergenz der Potenzreihe ist auf jedem abgeschlossenen $\Delta \subset D_R(z_0)$ gleichmäßig.

Also $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n\right) dz$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial\Delta} a_n (z-z_0)^n \, dz = 0,$$

da $z \mapsto a_n (z-z_0)^n$ eine Stammfunktion hat. $\square$

Potenzreihen definieren auf ihrem Konvergenzgebiet also holomorphe Funktionen.
Die Umkehrung ist auch richtig:

5.6 Satz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in G$.
Dann konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$
mit $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$ auf jeder Kreisscheibe
$D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| < r\}$ mit $D_r(z_0) \subset G$ gegen f.

Insbesondere ist der Konvergenzradius R größer gleich dem Abstand von z_0 zum Rand von G:

- $R \geq \operatorname{dist}(z_0, \partial G) = \operatorname{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus G)$

Beweis: Sei $r < \operatorname{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus G)$ und $\overline{D} = \overline{D_r}(z_0)$

Es genügt die Konvergenz der Potenzreihe gegen f in $D_r(z_0)$ zu zeigen.

Dazu entwickeln wir den "Cauchy-Kern" $\frac{1}{\xi - z}$ in eine geometrische Reihe:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} \cdot \frac{1}{\xi - z_0}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^\nu}{(\xi - z_0)^{\nu+1}} \quad \text{für } z \in D,\ \xi \in \partial D$$

Also gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{\nu+1}} (z - z_0)^\nu \, d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{\nu+1}} \, d\xi \right) (z - z_0)^\nu,$$

da die Konvergenz gleichmäßig bezgl. $\xi \in \partial D$ ist.

Nach den Cauchy'schen Formeln gilt:

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi$$

Also $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$ für $z \in D$.

$\square$

5.7 Corollar

Die Ableitung von $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ hat die Potenzreihenentwicklung $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n (z - z_0)^{n-1}$ im Konvergenzkreis.

Beweis: Die Ableitung $g = f'$: $D_R(z_0) \to \mathbb{C}$ ist holomorph und hat in z_0 die Ableitung

$$g^{(n)}(z_0) = f^{(n+1)}(z_0) = (n+1)!\, a_{n+1}$$

nach der Formel.

$\square$

5.8 Corollar

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R.

Dann existiert in einer offenen Umgebung U von $\overline{D_R(z_0)}$

$\exists$ oder $\neg\exists$?? definierte holomorphe Funktion $\tilde{f} : U \to \mathbb{C}$ mit $\tilde{f}|_{D_R(z_0)} = f$.

Beweis: Gäbe es ein solches U, dann wäre der Konvergenzradius größer als R.

$\square$

5.9 Beispiel

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

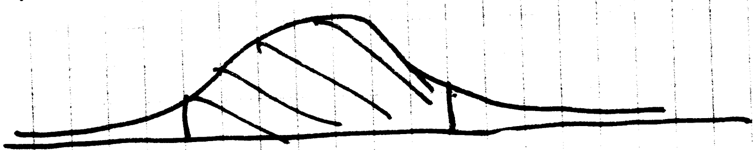
Dann gilt $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu}$

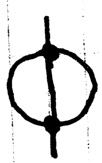
Als komplexe Funktion gilt:

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$$

Also ist der Konvergenzradius von $f(z)$ im Punkt $z_0 = 0$,

$R = |i| = 1$





Wir fassen die Ergebnisse zusammen:

5.10 Satz (Fundamentalsatz der Funktionentheorie)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Äquivalent sind:

1) f ist holomorph
2) f ist reell diff'bar und genügt den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen
3) f besitzt lokal eine Stammfunktion
4) f ist in jedem Punkt $z_0 \in G$ in eine Potenzreihe entwickelbar.

Beweis: Nochmals die wesentlichen Schritte:

(1) $\Leftrightarrow$ (2) hatten wir im Kapitel 2 gezeigt. Dabei war $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ nützlich.

(1) $\Rightarrow$ (3) Mit Kriterium für die Existenz von Stammfunktionen auf konvexen Gebieten.

(3) $\Rightarrow$ (1) Ableitungen von holomorphen Funktionen sind holomorph, was wir aus der Cauchy'schen Integralformel hergeleitet haben.

(1) $\Rightarrow$ (4) folgt aus ~~der~~ Cauchy'schen Integralformel durch Entwicklung des Cauchykerns

in eine Potenzreihe

(4) $\Rightarrow$ (1) folgt aus dem Satz von Morera. $\square$

5.11 Satz

Sei $f: G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet und $z_0 \in G$ ein Punkt mit $f'(z_0) \neq 0$.
Dann existiert eine offene Umgebung U von z_0 in G und eine eine offene Umgebung V von $f(z_0)$ in $\mathbb{C}$, sodass $f|_U : U \to V$ bijektiv ist.
Die Umkehrabbildung $(f|_U)^{-1} : V \to U$ ist ebenfalls holomorph.

Beweis: Zerlegen wir $f = g + ih$ in Real- und Imaginärteil, so sehen wir, dass die reelle Funktionalmatrix

$$(\det(J_f))(z_0) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial h}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial h}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Cauchy-R-DGL}} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & -\frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} \end{pmatrix}_{z_0}$$

$$= \left(\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right)(z_0) = |f'(z_0)|^2,$$

denn
$$f' = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)\right]$$
$$= \frac{\partial g}{\partial x} + i\frac{\partial h}{\partial x}$$

Da f beliebig oft komplex diff'bar ist, sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial y}$

stetig und nach Voraussetzung gilt: $f'(z_0) \neq 0$
Der Satz über die Umkehrfunktion lässt sich also anwenden:
Es gibt offene Umgebungen U von z_0 in G und V von $f(z_0)$ in $\mathbb{C}$, sodass $f|_U : U \to V$ bijektiv ist.

Durch Verkleinern von U und V können wir $f'(z) \neq 0 \ \forall z \in U$ erreichen.

$(f|_U)^{-1} : V \to U$ ist stetig partiell diff'bar und das Differential im Punkt $w_1 = f(z_1)$ ist die Umkehrabbildung des Differentials von f in z_1, also die Umkehrabbildung von

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f'(z_1) \cdot z.$$

Die Umkehrabbildung des Differentials ist also ebenfalls durch Multiplikation mit einer komplexen Zahl gegeben.
$(f|_U)' : U \to V \subset \mathbb{C}$ genügt also ebenfalls den Cauchy-Riemann'schen DGL und

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)} \quad \text{falls } w = f(z) \in V$$

$\square$

5.12 Definition

Sei $f: G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $z_0 \in G$.
f hat in z_0 eine Nullstelle der Ordnung n, wenn

(i) $f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$

und

(ii) $f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

Gilt $f^{(k)}(z_0)=0 \ \forall k\geq 0$, so sprechen wir von einer Nullstelle der Ordnung ∞.

Für $w\in\mathbb{C}$ hat f eine w-Stelle der Ordnung n, wenn $f-w$ eine Nullstelle der Ordnung n hat.

5.13 Satz

Sei $f: G\to\mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $z_0\in G$ eine Nullstelle von f.
Äquivalent sind:

1) f hat eine Nullstelle der Ordnung n
2) Die Potenzreihenentwicklung von f in z_0 lautet $f(z)=\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$ mit $a_n\neq 0$
3) Es gibt eine holomorphe Funktion $g: G\to\mathbb{C}$, sodass $f(z)=(z-z_0)^n g(z)$ mit $g(z_0)\neq 0$
4) Es gibt eine Umgebung U von $z_0\in G$ und eine $h: U\to\mathbb{C}$ mit einer einfachen Nullstelle in z_0, sodass $f(z)=(h(z))^n$ für $z\in U$.

Beweis: (1) $\Leftrightarrow$ (2) folgt aus Satz 5.6

(2) $\Rightarrow$ (3) Wir setzen $g(z)=\begin{cases} \frac{f(z)}{(z-z_0)^n} & \text{für } z\neq z_0 \\ a_n & \text{für } z=z_0\end{cases}$

g ist holomorph für $z\neq z_0$ und holomorph in z_0, da

$$g(z)=\sum_{\nu=n}^{\infty} a_n (z-z_0)^{\nu-n}$$

$(3) \Rightarrow (2)$ folgt auch

$(3) \Rightarrow (4)$ $f(z) = (z-z_0)^n g(z) \neq 0$

Wir können g mit der Wurzelfunktion

$\sqrt[n]{1+w} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{n}}{k} w^k$,

$\left(\binom{\frac{1}{n}}{k} = \frac{\frac{1}{n}}{k} \frac{\frac{1}{n}-1}{k-1} \cdots \frac{\frac{1}{n}-(k-1)}{1} \right)$

komponieren.

Die Reihe hat den Konvergenzradius $R=1$.

Für $a = g(z_0) = r \cdot (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$

und $b = r^{\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)$

eine n-te Wurzel aus a

können wir $w = \frac{g-a}{a}$ substituieren

Es gilt: $\sqrt[n]{1+\frac{g-a}{a}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{n}}{k} \left(\frac{g-a}{a}\right)^k$

$=: \tilde{g}(z)$

ist eine holomorphe Funktion

auf einer Umgebung U von z_0

und es gilt:

$(b\tilde{g})^n = \left(1+\frac{g-a}{a}\right)^n \cdot b^n = g$.

Also $h = (z-z_0) \cdot b\tilde{g}$ ist

die gesuchte Funktion.

$\tilde{g}(z_0) = 1$, also hat h eine einfache Nullstelle.

$\square$

(4) $\Rightarrow$ (3) Schreiben $h(z) = (z-z_0)\,\hat{h}(z)$

$$\Rightarrow f(z) = (h(z))^n = (z-z_0)^n \underbrace{(\hat{h}(z))^n}_{=:g(z)} \quad \square$$

5.14 Corollar

Sei $f: G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $z_0 \in G$ eine Nullstelle n-ter Ordnung.
Dann existieren Umgebungen U von z_0 und V von $0 \in \mathbb{C}$, sodass

1) z_0 die einzige Nullstelle von f in U ist
2) Zu jedem Wert $w \in V$ es genau n Punkte $z \in U$ gibt, sodass $f(z) = w$

Beweis: Nach Satz 5.11 gibt es Umgebungen U und V, sodass die Funktion h mit $f = h^n$ aus Satz 5.13 bijektive Abbildung $h: U \to \tilde{V}$ gibt.

OE $\tilde{V} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$

Also $f = h^n$ ist $\neq 0$ $\forall z \in U \setminus \{0\}$ und $V = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r^{\frac{1}{n}}\}$ hat die gewünschte Eigenschaft.