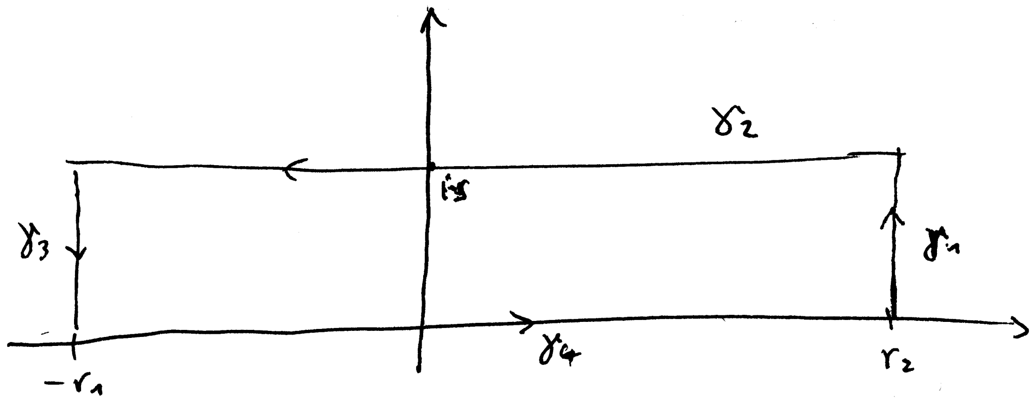
09.06.16

10.10 Satz: Sei $R(z)$ eine rat. Fkt., die auf $\mathbb{R}$ keine Pole hat mit Nennergrad größer als der Zählergrad.

Dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cdot e^{ix} \, dx = 2\pi i \cdot \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{Res}_z \left(R(\zeta) e^{i\zeta} \right)$$

Beweis:



Dann gilt:

$$|R(z)| \leq c \cdot |z|^{-1}$$ auf den Spuren $Sp\,\gamma_1, Sp\,\gamma_2, Sp\,\gamma_3$

und $r_1, r_2, s \in \mathbb{R}$ genügend groß.

Damit

$$\left| \int_{\gamma_2} R(z) \cdot e^{iz} \, dz \right| \leq (r_1 + r_2) \cdot c \cdot s \cdot e^{-s}$$

$$\left| \int_{\gamma_1} R(z) \, e^{iz} \, dz \right| = \int_0^1 R(r_2 + i \cdot t \cdot s) \cdot e^{ir_2 - t \cdot s} \cdot is) \, dt \,|$$

$$\leq \int_0^1 |R(r_2 + it\cdot s)| \cdot e^{-ts} s \cdot dt$$

$$\leq \max_{z \in \operatorname{Sp} \gamma_1} |R(z)| \cdot s \int_0^1 e^{-t\cdot s} \, dt$$

Analog: $\left| \int_{\gamma_3} R(z) \cdot e^{iz} \, dz \right| \leq c \cdot r_1^{-1}$

$r_1 = r_2 = s \longrightarrow \infty$ $\qquad \int_{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3} R(z) \cdot e^{iz} \, dz \xrightarrow[s \to \infty]{} 0$

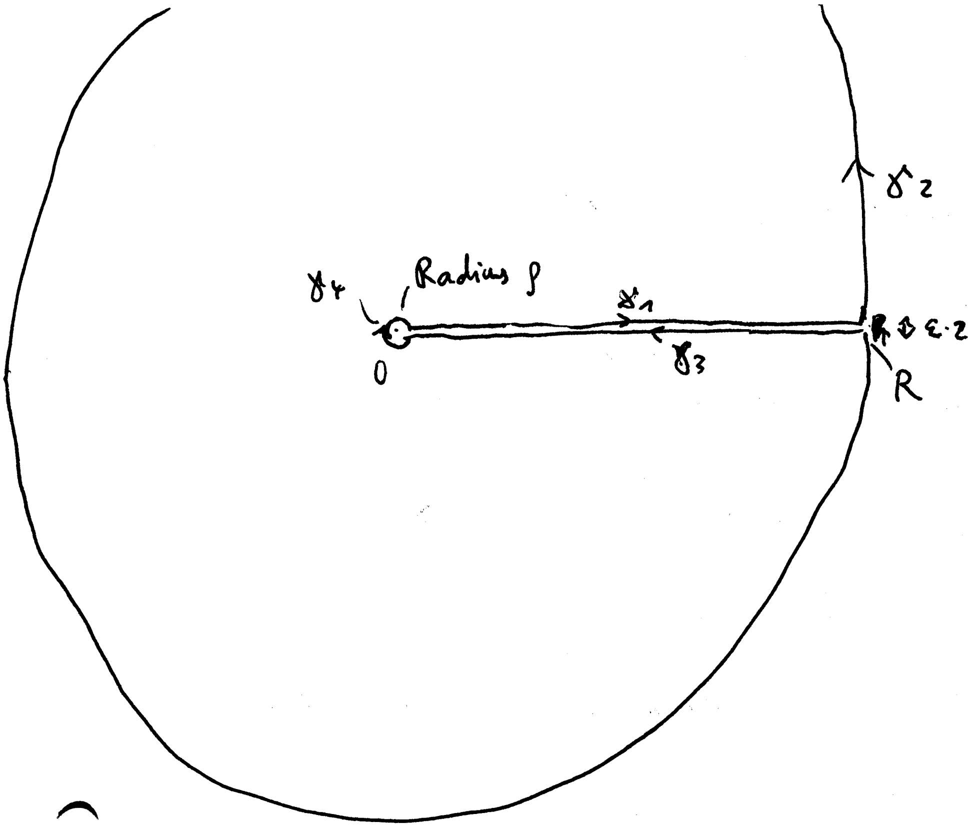
und der Residuensatz gibt die Behauptung.

10.12 Integrale vom Typ

$$\int_0^\infty x^\alpha \cdot R(x) \, dx, \qquad \int_0^\infty R(x) \, dx, \qquad \int_0^\infty \log x \; R(x) \, dx$$

wobei R eine rationale Funktion ohne Pole auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ und der Nennergrad um wenigstens 2 größer als der Zählergrad ist.

Idee: Verwenden die Mehrwertigkeit von z^α bzw. $\log z$.



Wir betrachten den Zweig des Logarithmus auf $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{>0}$

$$\log(z) = \log|z| + i\cdot\arg(z)$$

wobei $\arg(z) \in \,]0, 2\pi[$. Dann gilt:

$$z^\alpha = e^{\alpha\cdot\log(z)} = e^{\alpha\cdot(\log|z| + i\cdot\underbrace{\arg(z)}_{=:\varphi})}$$

$$= |z|^\alpha\cdot e^{i\alpha\varphi}$$

Für $\varepsilon \to 0$ unterscheidet sich z^α entlang γ_1 von z^α entlang γ_3 um den Faktor $e^{2\pi i\cdot\alpha}$.

Also

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\ R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}} \int_{\gamma_1+\gamma_3} z^\alpha\cdot R(z)\,dz = (1-e^{2\pi i\alpha})\cdot\int_0^\infty x^\alpha\cdot R(x)\,dx$$

Andererseits gilt

$$\left| \int_{\gamma_4} z^\alpha \cdot R(z)\, dz \right| \leq 2\pi i \rho \cdot \rho^\alpha \cdot C_1 \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$$

und

$$\left| \int_{\gamma_2} z^\alpha \cdot R(z)\, dz \right| \leq 2\pi \cdot R^{(1+\alpha)} \cdot C_2 \cdot R^{-2}$$

$$= 2\pi \cdot R^{-1+\alpha} \longrightarrow 0$$

Es folgt $0 < \alpha < 1$; Nennergrad $\geq 2 +$ Zählergrad

$$\int_0^\infty x^\alpha \cdot R(x)\, dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \cdot \sum_{z \neq 0} \operatorname{Res}_z \left(\zeta^\alpha \cdot R(\zeta) \right)$$

Für $\int_0^\infty R(x)\, dx$ betrachten wir

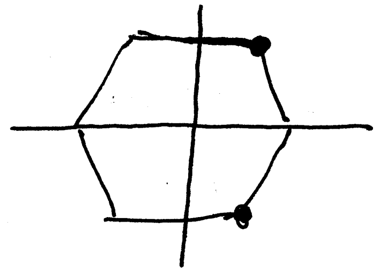
$$\int_{\gamma_1 + \gamma_3} \log z \cdot R(z)\, dz \Rightarrow -2\pi i \cdot \int_0^\infty R(x)\, dx$$

Für $\int_0^\infty \log(x) \cdot R(x)\, dx$

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_3} (\log z)^2 \cdot R(z)\, dz \longrightarrow \text{Faktor} \cdot \text{gesuchtes Integral}$$

$$\int_0^\infty R(x)\, dx = - \sum_{z \neq 0} \operatorname{Res}_z \left(\log \zeta \, R(\zeta) \right)$$

Beispiel:



$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi}{3\cdot\sqrt{3}}$$

Der Integrand hat Pole in $z=-1$ und $z_1 = \frac{1}{2}\cdot(1+i\cdot\sqrt{3})$

$$= e^{2\pi i/6}$$

$$z_2 = \frac{1}{2}\cdot(1-i\cdot\sqrt{3})$$

Für den gegebenen Zweig des Logarithmus gilt $\arg(z) \in \,]0,2\pi[$

gilt

$$\log(-1) = \pi\cdot i,$$

$$\log z_1 = \frac{2\pi i}{6}, \quad \log z_2 = 2\pi i\cdot\frac{5}{6}$$

Residuen sind also

$$\operatorname{Res}_{-1} \log\zeta\cdot\left(\frac{1}{1+\zeta^3}\right) = \pi\cdot i\,\frac{-1}{(1-z_1)(1-z_2)}$$

$$1+x^3 = (x+1)\cdot(x-z_1)\cdot(x-z_2)$$

usw.

Anwendungen des Residuensatzes in der Funktionentheorie:

10.14 Def.: Sei Γ ein Zykel in $\mathbb{C}$.

Γ berandet $\mathring{M} = M \subset \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}\,\Gamma$

wenn

$$n(\Gamma, z) = 1 \qquad \forall z \in M^\circ$$
$$n(\Gamma, z) = 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \bar{M}.$$

10.15 Satz: Sei Γ ein Zyklus der M berandet, f in einer Umgebung von $\bar{M}$ definierte holomorphe Funktion ohne Nullstellen auf $\mathrm{Sp}\,\Gamma$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N$$ die Anzahl der

Nullstellen von $\underbrace{f}_{\text{in } M}$ gezählt mit Vielfachheiten.

Ist f meromorph in der Umgebung, dann gilt, dass

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N - P$$, wobei N die Anzahl

der Nullstellen mit Vielfachheiten und P die Anzahl der Polstellen mit Vielfachheiten.

Beweis: Sei $z_0 \in M$ eine Nullstelle der Ordnung k. Dann können wir

$$f(z) = (z-z_0)^k \cdot g(z) \quad \text{mit} \quad g(z_0) \neq 0 \quad \text{schreiben.}$$

$$f'(z) = k \cdot (z-z_0)^{k-1} \cdot g(z) + (z-z_0)^k \cdot g'(z)$$

also

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = k \cdot (z-z_0)^{-1} + \underbrace{\frac{g'(z)}{g(z)}}_{\text{holomorph nahe } z_0}$$

$\operatorname{Res}_{z_0} \frac{f'}{f} = k$. Ist f meromorph so ist $(*)$ da k negativ, also gleich dem Negativen als Polstellenordnung.

Die Behauptung folgt mit dem Residuensatz.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \, dz = \sum_{z \in M} n(\Gamma, z) \cdot \operatorname{Res}_z \frac{f'}{f} = N - P$$

□

10.16 Satz von Rouché:

Sei G ein ~~[illegible]~~ Gebiet in $\mathbb{C}$, Γ ein Zykel der $M \subset G$ ~~[illegible] und~~ berandet und

$$h: [0,1] \times G \to \mathbb{C}, \quad (t,z) \mapsto h_t(z),$$

eine stetige Fkt., so dass $h_t: G \to \mathbb{C}$ holomorph und keine Nullstellen auf Γ hat $\forall t \in [0,1]$.

Dann haben h_0 und h_1 gleich viele Nullstellen in M mit Vielfachheit gezählt.

Beweis: Das Nullstellen ~~zählen~~ zählen des Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{h_t'(z)}{h_t(z)}\, dz$$

hängt stetig von t ab und hat ganzzahlige Werte.
Die Abbildung

$$t \mapsto \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\Gamma \frac{h_t'(z)}{h_t(z)}\, dz \quad , \quad [0,1] \longrightarrow \mathbb{Z}$$

ist also konstant.

10.17 Korollar: Mit G, Γ und M wie oben, und $f, g : G \to \mathbb{C}$ holomorphe Fkt., für die $|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \forall z \in \operatorname{Sp}\Gamma$.
gilt: f und g haben gleich viele Nullstellen in M.

Beweis: $h(t,z) = f(z) + t \cdot (g(z) - f(z))$ wird für $t \in [0,1]$ und $z \in \operatorname{Sp}\gamma$ nicht null.

Also $f = h_0$ und $g = h_1$ haben gleich viele Nullstellen.

10.18 Beispiel:

Sei $g(z) = z^4 - 4z + 2$

$M = D_1(0)$ Für $|z| = 1$ gilt

$$|z^4| = 1 < 2 \leq |-4z + 2|$$

↑? geometrisch

Also hat $g(z) = z^4 - 4z + 2$ genauso viele Nullstellen wie $f(z) = z^4$ in $D_1(0)$ also 4, gezählt mit Vielfachheit.