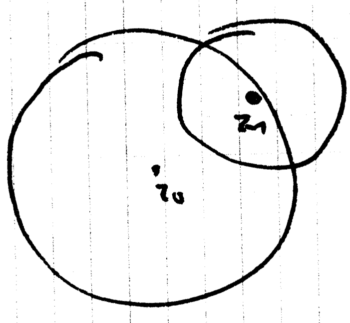
16. Analytische Fortsetzung und Riemann'sche Flächen

16.1

Sei $f: D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Fn auf einer Kreisscheibe $D = D_{r_0}(z_0)$.
Entwickeln wir f in einem Punkt $z_1 \in D$ in eine Potenzreihe, so kann es vorkommen, dass der Konvergenzkreis $D_1 = D_{r_1}(z_1)$ von f in z_1 über D hinausragt.



Wir können dann f auf die Vereinigung $D \cup D_1$ fortsetzen.

Setzt man dieses Verfahren fort, so erhält man eine holomorphe Funktion, die auf einer Vereinigung von Kreisen $D_k = D_{r_k}(z_k)$.
Dabei hängt die Funktion auf letzten Kreis auch davon ab, wie wir zu diesem Punkt gekommen sind.

16.2 Definition

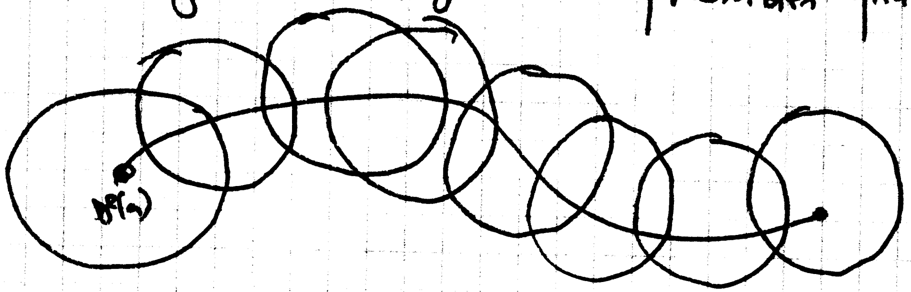
Sei $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Weg, $f = f_0 : D_{r_0}(\gamma(a)) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion

Man sagt f lässt sich analytisch entlang des Weges γ fortsetzen, wenn es eine Unterteilung

$a=t_0<t_1<\dots<t_n=b$

des Intervalls gibt, Radien $r_0,\dots,r_n>0$, und holomorphe Funktionen $f_i: \overset{=D_i}{D_{r_i}(\gamma(t_i))} \to \mathbb{C}$,

sodass $\gamma(t_{i+1}) \in D_{r_i}(\gamma(t_i))$ und $f_i|_{D_i \cap D_{i+1}} = f_{i+1}|_{D_i\cap D_{i+1}}$ gilt.



16.3 Lemma

Lässt sich f entlang γ bzgl. der Unterteilung

$a=t_0<t_1<\dots<t_n=b$

analytisch fortsetzen,

dann lässt sich f auch bzgl. jeder feineren Unterteilung analytisch fortsetzen und das Endresultat

$f_n: D_n = D_{r_n}(b) \to \mathbb{C}$

hängt nicht von der Unterteilung ab.

Beweis: Folgt aus Identitätssatz? $\square$

Bemerkung: Man spricht daher auch von der analytischen Fortsetzung entlang eines Weges.

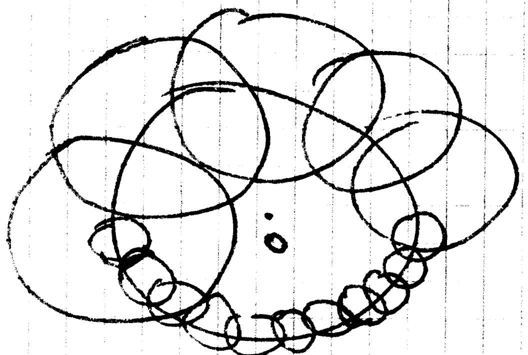
16.4 Beispiel

Setzen wir den Logarithmus entlang der Wege

$\gamma: [0,\pi] \to \mathbb{C}, \; \gamma(t) = e^{it}$

$\delta: [0,\pi] \to \mathbb{C}, \; \delta(t) = e^{-it}$

fort,



dann unterscheidet sich das Endresultat (holomorphe Funktion um $z_n = -1$) um einen Summanden $2\pi i$.

Um dieses besser zu verstehen hat Riemann die Riemann'schen Flächen zu einem Funktionskeim (= holomorphe Potenzreihe) eingeführt:

In jedem Punkt $a \in \mathbb{C}$ ist eine dort holomorphe Funktion durch ihre Potenzreihenentwicklung eindeutig festgelegt. Wir betrachten daher die Menge der holomorphen Funktionskeime

$\mathcal{O} := \{(a,f) \mid a \in \mathbb{C}$ und $f = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu$ eine konvergente Potenzreihe$\}$

zusammen mit der Projektion

$\underset{\nwarrow pr,}{\mathcal{O}} \to \mathbb{C}, \; (a,f) \mapsto a$

Auf $\mathcal{O}$ führen durch eine Basis eine Topologie ein:

Zu jeder holomorphen Funktion $g: U \to \mathbb{C}$ mit $U \subset \mathbb{C}$ offen, betrachten wir $\mathfrak{z} = \{(a,f) \mid a \in U$ und f ist Potenzreihenentw. von g in $a\} \subset \mathcal{O}$

$(X, \mathcal{J})$ topologischer Raum, System $\mathcal{B} \subset \mathcal{J}$ heißt Basis der Topologie, wenn jedes Element von $\mathcal{J}$ eine Vereinigung von Elementen in $\mathcal{B}$ ist.

Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset 2^X$ erzeugt eine Topologie $\mathcal{J}$, von der $\mathcal{B}$ eine Basis ist, genau dann, wenn für $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ der Durchschnitt $B_1 \cap B_2$ eine Vereinigung von Teilmengen von $\mathcal{B}$ ist
$\mathcal{J} = \{A \subset X \mid A$ ist Vereinigung von $B_j \in \mathcal{B}\}$

Damit wird $\mathcal{O}$ zu einem topologischen Raum.
$\mathcal{O}$ ist hausdorff'sch, denn für $(a_1, f_1), (a_2, f_2)$ mit $a_1 \neq a_2$ können r_1, r_2 finden, sodass $D_{r_j}(a_j) \subset$ Konvergenzkreis von f_j $(j = 1,2)$ liegt, $D_{r_1}(a_1) \cap D_{r_2}(a_2) = \emptyset$

Ist $a_1 = a_2$ und $f_1 \neq f_2$, so betrachten wir $r > 0$, sodass $D = D_r(a_j) \subset$ Konvergenzkreis von f_j $(j = 1,2)$ und Funktion $g_j : D \to \mathbb{C}$ ist Potenzreihenentwicklung f_j in a_j.
Dann sind die Mengen
$\hat{g}_j = \{(a, f) \mid a \in D, f$ Potenzentwicklung von g_j in $a\}$
disjunkt nach Identitätssatz.

Lokal ist $\mathcal{O}$ vermöge $pr_1 : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ homöomorph zu offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$.

16.6 Satz

Mit der obigen Topologie wird $\mathcal{O}$ zu einem Hausdorff-Raum, der lokal vermöge der Projektion zu offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ homöomorph ist.

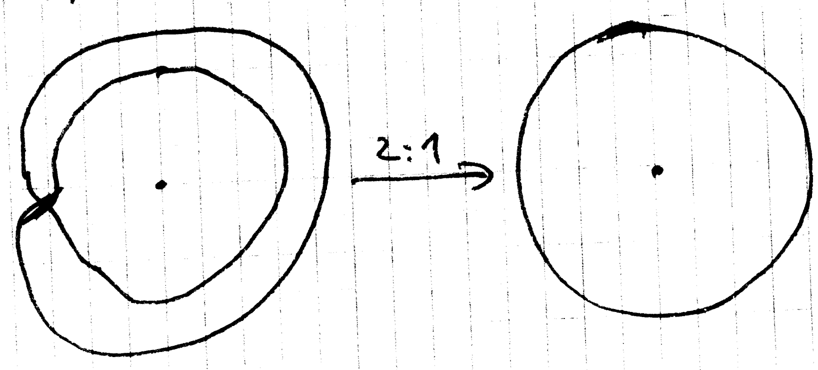
Beweis: klar!? $\square$

16.7 Definition

Sei $(a,f) \in \mathcal{O}$ ein (holomorpher) Funktionskeim
Die Riemann'sche Fläche R des Funktionskeims (a,f) ist die Wegzusammenhangskomponente von $\mathcal{O}$, die (a,f) enthält.

R ist ein zweidimensionaler topologischer Hausdorff-Raum:
Jeder Punkt von R ist in Umgebung enthalten, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist.

Beispiel: Riemann'sche Fläche zu $\sqrt{z}$, genauer $\sqrt{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} z^n$,
$\left(a=1,\ f=\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (z-1)^n\right)$



16.8 Definition

Ein topologischer Hausdorff-Raum X heißt
2-dimensionale Mannigfaltigkeit,
wenn jeder Punkt $p \in X$ eine Umgebung U hat,
welche homöomorph zu einer offenen Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^2$ $(=\mathbb{C})$ ist.

Die Bijektion $\varphi: U \longrightarrow V$ nennt man eine Karte.
Ein Atlas $\mathcal{A}$ von X ist ein System $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) | i \in I\}$
von Karten, sodass $\bigcup_{i \in I} U_i = X$.

Ein Atlas heißt differenzierbar (holomorph),
wenn sämtliche Übergangsabbildungen

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \underbrace{\varphi_i(U_i \cap U_j)}_{\subset \, \mathbb{R}^2 (=\mathbb{C})} \longrightarrow \underbrace{\varphi_j(U_i \cap U_j)}_{\subset \, \mathbb{R}^2 (=\mathbb{C})}$$

differenzierbar (bzw. holomorph) sind.

Zwei diff'bare (bzw. holomorphe) Atlanten A, A' heißen
diff'bar (bzw. holomorph) verträglich,
wenn auch $A \cup A'$ ein diff'barer (bzw. holomorpher) Atlas ist.

Eine diff'bare (holomorphe) Struktur auf X ist
eine Äquivalenzklasse von diff'baren (holomorphen) Atlanten

Eine (abstrakte) Riemann'sche Fläche ist eine 2-dimensionale
zusammenhängende Mannigfaltigkeit zusammen mit einer
holomorphen Struktur.

Zwei Riemann'sche Flächen X und X' heißen isomorph, wenn es eine bijektive in beiden Richtungen holomorphe Abbildung $f: X \to X'$ gibt.

Bemerkung: Riemann'sche Flächen sind orientiert!