2016-05-12 BEWEIS

Schreiben $f(z) = (h(z))^n$ mit h holomorph in Umgebung $U' \subset G$ von z_0;
ferner nach Verkleinern können $h: U' \to \underset{h(U')}{\overset{\shortparallel}{W'}} \subset \mathbb{C}$ bijektiv annehmen

Wählen $r > 0$ so, dass $\mathcal{D}_r(0) \subset W'$. Dann wählen wir $U = h^{-1}(\mathcal{D}_r(0))$ und
$V = \mathcal{D}_{r^n}(0)$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "h", "1:1"'] \arrow[rr, bend left, "f"] & \mathcal{D}_r(0) \setminus \{0\} \arrow[r, "n:1"] & V = \mathcal{D}_{r^n}(0) \setminus \{0\} \end{tikzcd}$$
$$a \mapsto a^n$$

Zu $w \in V \neq 0$ mit $w = a^n$ sind die Punkte $a \cdot e^{\frac{2\pi i}{n} k}$ weitere, die durch
$a \mapsto a^n$ auf W abgebildet werden.
Die n-Urbildpunkte unter h von diesen sind die n-Punkte.

$\boxtimes$

5.15 Satz (Identitätssatz)

Es sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $f: G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion.
Dann sind äquivalent

(1) $f(z) \equiv 0$, d.h. f ist die Nullfunktion

(2) f hat in G eine Nullstelle der Ordnung ∞.

(3) Es gibt eine Menge $N \subset G$ mit einem Häufungspunkt in G, sodass $f(z) = 0 \quad \forall z \in N$

5.16 Satz (2-te Fassung des Identitätssatzes)

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g: G \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen.
Dann sind äquivalent.

(1) $f = g$

(2) $\exists z_0 \in G$, so dass $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0) \quad \forall n \geq 0$

(3) $\exists$ eine Menge $N \subset G$ mit Häufungspunkt in G, sodass $f(z) = g(z) \quad \forall z \in N$

BEWEIS

Die zweite Version ist nur scheinbar allgemeiner, man wendet die erste Version auf $f-g$ an.

$\boxtimes$

BEWEIS (Satz 5.15)

(1) $\Rightarrow$ (2): Ist f die Nullfunktion, dann ist jeder Punkt $z_0 \in G$ eine Nullstelle der Ordnung ∞.

(2) $\Rightarrow$ (3): Hat f in z_0 eine Nullstelle der Ordnung ∞, so ist die Taylorreihe von f in z_0 die Nullstelle. Diese konvergiert in der Umgebung U von z_0 gegen f, also konnen wir $N=U$ wählen

(3) $\Rightarrow$ (2): Sei $(z_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten $\neq z_0$ mit $\lim\limits_{\nu\to\infty} z_\nu = z_0 \in G$, so ist $f(z_\nu)=0 \ \forall \nu \geq 1$. Wegen der Stetigkeit von f gilt dann $f(z_0)=0$. f kann in z_0 keine Nullstelle endlicher Ordnung haben, da sonst nach 5.14 z_0 die einzige Nullstelle in einer kleinen Umgebung von $z_0 \in G$ wäre.

(2) $\Rightarrow$ (1): Wir betrachten die Menge $M=\{z\in G \mid f^{(n)}(z)=0 \ \forall n\geq 0\}$
Nach Voraussetzung ist $M \neq \emptyset$, da f eine Nullstelle der Ordnung ∞ hat. $M\subset G$ ist abgeschlossen als Durchschnitt der abgeschlossenen Menge $M=\bigcap\limits_{n\geq 0} \{z\in G \mid f^{(n)}(z)=0\}$
M ist auch offen, denn mit $z_0\in M$ ist die Potenzreihenentwicklung von f in z_0 Null, also $f|_U \equiv 0$ für Umgebung $U\subset G$ in z_0 und in allen Punkten in U hat f Nullstellen der Ordnung ∞. Also $U\subset M$. Also ist M offen und abgeschlossen und nicht leer.
Da G ein Gebiet ist, folgt $M=G$.

$\boxdot$

Bemerkung und Beispiele 5.17

1) Der Identitätssatz ist der Grund, warum wir die Definitionsbereiche holomorpher Funktionen als Gebiet voraussetzen.

2) Die Funktion $\sin(z)=\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu \frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$ ist eine auf ganz $\mathbb{C}$

definierte Funktion, da der KR $R=\infty$. Für alle reellen Punkte schreiben wir $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$. Da $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ eine Menge mit Häufungspunkten ist, folgt: $\sin(z+2\pi) = \sin(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

3) Es kann vorkommen, dass die Menge der Nullstellen einer nicht konstanten holomorphen Funktion $f: G \to \mathbb{C}$ Häufungspunkte hat. Diese liegen dann aber in ∂G.

4) Beispiel: $\sin(\frac{1}{z})$ ist holomorphe Funktion auf $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Diese hat die Nullstellen $z_k = \frac{1}{2\pi k} \xrightarrow{k\to\infty} 0 \notin G$.

5.18 Satz (Gebietstreue)

Sei $f: G \to \mathbb{C}$ eine nicht konstante holomorphe Funktion auf einem Gebiet. Dann ist der Wertebereich $f(G) \subset \mathbb{C}$ ebenfalls ein Gebiet.

BEWEIS

Dass $f(G) \subset \mathbb{C}$ wegzusammenhängend ist, ist klar.
Die Behauptung, dass $f(G) \subset \mathbb{C}$ offen ist, bleibt nun zu zeigen.
Sei $w_0 = f(z_0)$ ein Punkt im Bild. Dann hat die Funktion $f - w_0$ in z_0 eine Nullstelle endlicher Ordnung, da f nicht konstant ist. Nach dem Satz 5.14 gibt es eine Umgebung V von w_0, so dass alle Punkte von V im Wertebereich liegen. $\square$

5.19 Satz (Maximumprinzip)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph. Nimmt die Funktion $|f|$ in einem Punkt $z_0 \in G$ ein Maximum an, dann ist f konstant.
Ist G beschränkt und lässt sich f stetig auf $\overline{G}$ fortsetzen, dann nimmt $|f|$ das Maximum auf dem Rand ∂G an.

BEWEIS

Angenommen $|f|$ hat ein Maximum in $z_0 \in G$. Dann liegt
$$f(z_0) \in f(G) \subset \{ w \in \mathbb{C} \mid |w| \leq |f(z_0)| \}$$
$f(z_0)$ liegt also auf dem Rand von $f(G)$. Wegen der Gebietstreue von nicht kons-

tanten holomorphen Funktionen ist also f konstant. Lässt sich f stetig auf $\overline{G}$ fortsetzen, so $|f|: \overline{G} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem Kompaktum, da G beschränkt. $|f|$ nimmt auf $\overline{G}$ Maximum an; wegen dem ersten Teil kann das Maximum, wenn f nicht konstant, nicht im Innern angenommen werden. Das Maximum wird also in jedem Fall auf dem Rand angenommen. $\boxtimes$

5.20 Satz (Minimumprinzip)

(i) Sei $f: G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet.
Hat $|f|$ ein Minimum in $z_0 \in G$, dann ist $f(z_0)=0$ oder f ist konstant.

(ii) Ist G beschränkt und setzt sich f stetig auf $\overline{G}$ fort, dann hat f Nullstellen in G oder das Minimum von $|f|$ wird auf ∂G angenommen.

BEWEIS

Hat f keine Nullstellen in G, dann ist auch $\frac{1}{f}$ auf G holomorph; und wir können das Maximumprinzip auf $\frac{1}{f}$ anwenden. $\square$

2016-05-12

6. Die Cauchyschen Ungleichungen und Folgerungen

6.1 Satz

Sei f in einer Umgebung von $\overline{\mathcal{D}_r(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| \leq r\}$ definierte holomorphe Funktion und $0 < \delta \leq r$.

Dann gilt für Punkte $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| \leq r-\delta$ die Abschätzung

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{r \cdot n!}{\delta^{n+1}} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|$$

BEWEIS

Nach den Cauchyschen Formeln gilt

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{D}_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, d\zeta$$

Ist nun $|z-z_0| \leq r-\delta$, so gilt $|\zeta - z| \geq \delta$. Also

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0 + r \cdot e^{it})|}{|\underbrace{z_0 + r \cdot e^{it}}_{=\zeta} - z|^{n+1}} \, r \, dt$$

$$\leq \frac{n! \, r}{\delta^{n+1}} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|$$

$\boxtimes$

6.2 Folgerung

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|\zeta - z| = r} |f(\zeta)|$$

BEWEIS

Dies ist der Spezialfall $\delta = r$. $\boxtimes$

6.3 Folgerung

Für $|z-z_0| \leq \frac{r}{2}$ gilt: $|f^{(n)}(z_0)| \leq 2^{n+1} \frac{n!}{r^n} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|$

BEWEIS

Der Fall $\delta = \frac{r}{2}$. $\boxtimes$

Diese Ungleichungen haben bemerkenswerte Anwendungen für auf ganz $\mathbb{C}$ definierte holomorphe Funktionen.

6.4 Definition

Eine holomorphe Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nennt man **ganze (holomorphe) Funktion**. Zum Beispiel nennt man / sind Polynome ganze Funktionen. Ganze Funktionen, die keine Polynome sind, nennt man **transzendente ganze Funktionen**

6.5 Satz (Liouville)

Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.

BEWEIS

Sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion und M eine Schranke, also $|f(z)| \leq M$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Dann gilt nach Folgerung 6.2

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{r^n} M \xrightarrow{r \to \infty} 0 \qquad n \geq 1$$

Die Taylorreihe von f in z hat also nur den konstanten Term $\neq 0$. □

6.6 Satz (Fundamentalsatz der Algebra)

Jedes Polynom $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ von Grad ≥ 1 hat wenigstens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

BEWEIS

Es sei $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$ mit $a_n \neq 0$.

Dann gilt für z mit $|z| \geq 1$

$$|p(z)| \geq |a_n z^n| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k z^k|$$

$$\geq |a_n| \cdot |z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \, |z|^k$$

$$\geq |a_n| \cdot |z|^{n-1} \left(|z| - \left(\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right) \frac{1}{|a_n|} \right)$$

Für $r = \max\{1, \frac{1}{|a_n|} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\}$ gilt also, alle Nullstellen von p liegen in der Kreisscheibe $\overline{\mathcal{D}_r(0)}$.

Angenommen p hat keine Nullstellen, dann gilt $\left|\frac{1}{p(z)}\right| \leq \frac{1}{|a_n|}$ für z mit $|z| \geq r+1$. Auf $\mathcal{D}_{r+1}(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r+1\}$ wäre dann $\frac{1}{p(z)}$ ebenfalls beschränkt. Also $\frac{1}{p}$ wäre eine beschränkte ganze Funktion und somit nach Liouville konstant. $\lightning$ zu $n \geq 1$.

□

Für Polynome haben wir gerade gezeigt, dass $p(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, denn $p(z) - w$ hat eine Nullstelle für jedes w.

Allgemeiner gilt für ganze transzendente Funktionen:

6.7 Satz

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist eine ganze nicht konstante Funktion, dann gilt $f(\mathbb{C})$ liegt NICHT in $\mathbb{C}$.

BEWEIS

Angenommen $w \in \mathbb{C}$ liegt nicht im Abschluss von $f(\mathbb{C})$. Dann wäre die Funktion $g(z) = \frac{1}{f(z) - w}$ und $\frac{1}{\varepsilon}$ beschränkt für ε, so dass $P_\varepsilon(w) \cap f(\mathbb{C}) = \emptyset$, also konstant. $\boxtimes$

6.8 Bemerkung

Nicht alle Werte müssen angenommen werden.

Beispiel

$\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum \frac{z^n}{n!}$

Für $\exp(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, da $\exp(z) \cdot \exp(-z) = \exp(0) = 1$ nach dem Additionstheorem.

Ein tiefer Satz ist:

6.9 Satz (Picard)

Sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz nicht konstant. Dann besteht $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C})$ aus höchstens einem Punkt.