

## 16.9 Beispiele

a) Die Riemannsche Fläche eines Funktionskeims  $f$  konvergenter Potenzreihe

b)  $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  diffeomorph zu  $S^2$  holomorpher Atlas

$U_0 = \mathbb{C}$ ,  $U_1 = \mathbb{C} \setminus \{0\} \cup \{\infty\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}$  Projektion vom Südpol  $= (0 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\})$

$\mathbb{C} \xrightarrow{\cong} U_0 \cap U_1 = \mathbb{C}^* \hookrightarrow \mathbb{C}$

$\mathbb{C}^* \xrightarrow[\cong]{\varphi_{10} = \varphi_{10} \circ \varphi_0^{-1}} \mathbb{C}^*$   
 $z \mapsto \frac{1}{z}$

holomorpher Atlas

c)  $\mathbb{C}/\Omega \cong S^1 \times S^1$  homeomorph

d) Algebraische Kurven: Sei  $f(z, w) \in \mathbb{C}[z, w]$  ein irreduzibles Polynom,

$R = \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid f(a, b) = 0\}$  das Nullstellengebilde. Dies ist eine Riemannsche

Fläche, wenn  $f$  glatt  $\Leftrightarrow f, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial w}$  keine gemeinsame Nullstelle haben

$(a, b) \in R$  und  $\frac{\partial f}{\partial w}(a, b) \neq 0$ , dann können wir  $w$  als holomorphe Funktion von

$(z-a)$  darstellen, nach dem Satz über implizite Funktionen  $z = x+iy$ ,

$w = u+iv$ ,  $f = g+ih$ ,

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix} (a, b) \neq 0$$

Umrechnen im Wirtinger-Kalkül:  $g, h \leftrightarrow f, \bar{f}$ ,  $u, v \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial w}, \frac{\partial}{\partial \bar{w}}$ ,

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial w} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{w}} \end{pmatrix} = \left| \frac{\partial f}{\partial w} \right|^2 \quad \text{und die differenzierbare Lösung}$$

$$w = u(x, y) + iv(x, y), \quad \frac{\partial w}{\partial z} \equiv 0$$

## 16.10 Satz

Die Abbildung  $\{\text{Riemannsche Fläche}\} \rightarrow \text{Körper} \supset \mathbb{C}$ ,  $X \mapsto M(X)$

induziert eine Bijektion zwischen den Mengen

a) kompakte Riemannsche Flächen

b) endlich erzeugte Oberkörper von  $\mathbb{C}$  vom Transzendenzgrad 1

Beispiele:

1)  $\mathbb{C}(z) = M(\mathbb{P}^1)$

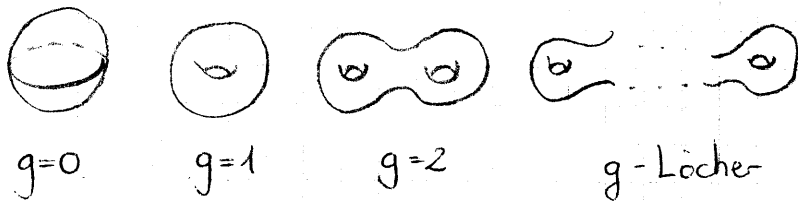
2)  $K = \mathbb{C}[w]/f(z, w)$ ,  $f \in \mathbb{C}[z, w]$  irreduzibel,  $f \in \mathbb{C}(z)[w]$

$$3) E = \mathbb{C}/\mathcal{L} \mapsto K(\mathcal{L}) \cong \mathbb{C}(\varphi)[\varphi'] / (\varphi')^2 - 4\varphi^3 - g_2\varphi - g_3$$

Bemerkung:

Satz 16.10 zu beweisen ist eines der Ziele des Seminars Riemannsche Flächen im nächsten Semester. (Vorbereitung: Do 28.07., 12h15, HS III (U))

Topologisch lassen sich kompakte Riemannsche Flächen durch eine numerische Invariante  $g = \text{Geschlecht} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  klassifizieren.



Für festen topologischen Typ bildet die Menge der komplexen Strukturen eine  $3g-3$  dimensionale komplexe "Mannigfaltigkeit" ( $M_g$ ) genauer Orbifold für

$$g \geq 2 \quad \dim M_g - \dim \text{Aut}(X) = 3g-3, \quad g=0, \quad \dim M_g = 0,$$

$$\dim \text{Aut}(\mathbb{P}^1) = 3$$

$$\text{" } \quad \text{GL}(2, \mathbb{C}) / \mathbb{C}^* = \text{PGL}(2, \mathbb{C})$$

$$\mathbb{P}^1, \quad z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$$

$$g=1, \quad \text{Aut}(E) \simeq E, \quad \dim = 1$$

## Analytische Fortsetzung algebraischer Funktionen

16.11

Sei  $(z, w) \in \mathbb{C}[z, w]$  ein irreduzibles Polynom.  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$  ein Punkt mit

$$(a, b) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial w}(a, b) \neq 0$$

Satz über implizite Funktionen

$$\Rightarrow f_{a,b} = \sum_{v=0}^{\infty} a_v (z-a)^v \quad \text{mit} \quad f_{a,b}(a) = b,$$

so dass  $p(z, f_{a,b}(z)) = 0$ ,  $f_{a,b}$  holomorph auf  $U$  offene Umgebung von  $a$

Wie sieht die holomorphe Fortsetzung von  $f$  aus?

## 16.12 Satz

$p, q \in \mathbb{C}[\omega]$  zwei Polynome

$$p(\omega) = a_n \omega^n + \dots + a_1 \omega + a_0 \quad \text{Grad } n$$

$$q(\omega) = b_m \omega^m + \dots + b_1 \omega + b_0 \quad \text{Grad } m$$

Betrachte die Sylvestermatrix vom Format  $(n+m) \times (n+m)$

$$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \left\{ \text{Syl}(p, q) = \begin{pmatrix} a_n & \dots & a_0 & & & \\ & a_n & \dots & a_0 & & \\ & & a_n & \dots & a_0 & \\ b_m & \dots & b_1 & b_0 & & \\ & & & & b_m & \dots & b_0 \end{pmatrix} \right.$$

und deren Determinante  $R(p, q) = \det \text{Syl}(p, q)$ , die sogenannte Resultante von  $p$  und  $q$ .

$$R(p, q) = 0 \Leftrightarrow p \text{ und } q \text{ haben gemeinsame Nullstelle}$$

### BEWEIS

Es bezeichne  $\mathbb{C}[\omega]_{\leq d}$  den Vektorraum der Polynome von Grad  $\leq d$ .

Wir betrachten die Multiplikationsabbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[\omega]_{\leq m-1} \oplus \mathbb{C}[\omega]_{\leq n-1} &\longrightarrow \mathbb{C}[\omega]_{\leq n+m-1} \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha \cdot p + \beta \cdot q \end{aligned}$$

Die Transponierte der Sylvestermatrix ist die Matrixdarstellung dieser  $\mathbb{C}$ -linearen Abbildung bzgl. der Basen

$$(1, 0), \dots, (\omega^{m-1}, 0), (0, 1), \dots, (0, \omega^{n-1}) \quad \text{und} \quad 1, \dots, \omega^{n+m-1}$$

umgekehrt angeordnet.

Die Abbildung ist nicht injektiv genau dann, wenn  $p$  und  $q$  einen gemeinsamen Faktor haben: Ist  $p = p' \cdot r$ ,  $q = q' \cdot r$  mit Grad von  $r \geq 1$ , dann ist

$$(q', -p') \in \mathbb{C}[\omega]_{\leq m-1} \oplus \mathbb{C}[\omega]_{\leq n-1}$$

ein Element des Kerns

$$(q', -p') \longmapsto q'p - p'q = (q'p' - p'q') \cdot r = 0$$

Umgekehrt ein Element  $(q', -p') \in \text{Ker}(\mathbb{C}[\omega]_{\leq m-1} \oplus \mathbb{C}[\omega]_{\leq n-1} \rightarrow \mathbb{C}[\omega]_{\leq m+n-1})$

erfüllt  $q' \cdot p = p' \cdot q$ .

Und wenn wir Faktorisierung von  $p, q$  betrachten, sehen wir, dass  $p$  und  $q$

gemeinsamen Faktor haben.

Die Behauptung folgt:  $\ker \neq 0 \Leftrightarrow R(p, q) = 0$   $\square$

16.13

Betrachten jetzt

$$P(z, w) = a_n(z) \cdot w^n + \dots + a_1(z) \cdot w + a_0(z) \in \mathbb{C}[z][w] \subset \mathbb{C}(z)[w]$$

$\mathbb{C}[z, w]$

und die Resultante

$$R(P, \frac{\partial P}{\partial w}) \in \mathbb{C}[z], \quad R(z) := R(P, \frac{\partial P}{\partial w})$$

$R(z)$  verschwindet in einem Punkt  $a \in \mathbb{C}$

$\Leftrightarrow P(a, w), \frac{\partial P}{\partial w}$  einen gemeinsamen Faktor haben

$\Leftrightarrow$  Das Polynom  $P(a, w)$  hat eine mehrfache Nullstelle

Sei nun  $V = \{a \in \mathbb{C} \mid a_n(a) \cdot R(a) \neq 0\}$ .

Die Nullstellenmenge  $\tilde{V} = \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid a \in V, P(a, b) = 0\}$  ist dann eine

$n$ -blättrige Überlagerung  $\tilde{V}$  von  $V$ .

$$\begin{array}{ccc} \tilde{V} & \subset & \mathbb{C}^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \subset & \mathbb{C} \end{array}$$

Sei  $(a, b) \in \tilde{V}$ ,  $f_{a,b} \in \mathcal{O}$  lokale Lösung.

Die Riemannsche Fläche der analytischen Fortsetzung von  $f_{a,b}$  entlang von Wegen in  $V$  ist isomorph zu  $\tilde{V}$ .