16.11 (Wiederholung)

Betrachten ein irreduzibles Polynom

$$P(z,w) = a_n(z)w^n + \dots + a_1(z)w + a_0(z) \in \mathbb{C}[z,w] \subset \mathbb{C}(z)[w]$$

und die Resultante

$$R(z) := R\left(P(z,w), \tfrac{\partial P}{\partial w}(z,w)\right) \in \mathbb{C}[z]$$

$R(a) = 0 \Leftrightarrow$ Die Polynome $P(a,w), \frac{\partial P}{\partial w}(a,w) \in \mathbb{C}[w]$ haben eine gemeinsame Nullstelle

Sei $V = \{a \in \mathbb{C} \mid a_n(a)\cdot R(a) \neq 0\} = \mathbb{C} \setminus \{\text{endl. viele Punkte}\}$
und $\tilde V = \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 \mid a \in V, P(a,b) = 0\}$

Dann ist
$$\begin{tikzcd} \tilde V \arrow[d, "pr_1"'] & \subset & \mathbb{C}^2 \arrow[d, "pr_1"] \\ V & \subset & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$
eine n-blättrige Überlagerung,
d.h. jeder Punkt $a \in V$ hat eine Umgebung $U = U(a)$,
sodass $pr_1^{-1}(U) = U_1 \cup \dots \cup U_n$ eine disjunkte Vereinigung
ist und $pr_1|_{U_j} : U_j \to U$ ein Homöomorphismus ist.

In der Tat $b_1, \dots, b_n$ die paarweise verschiedenen Nullstellen
von $P(a,w)$, dann lässt sich in den Punkten $(a,b_j) \in \tilde V$
auf $P(z,w) = 0$ der Satz über implizite Funktionen
anwenden, d.h. $\exists\, U^{(j)} = U(a)$ und $f_j : U^{(j)} \to \mathbb{C}$
holomorph mit $f_j(a) = b_j$ und $P(z, f_j(z)) \equiv 0$
Dann wählen $U = \bigcap U^{(j)}$ und $U_j = \{(z, f_j(z)) \mid z \in U\} \subset \tilde V$
Die Abbildungen $pr_1|_{U_j} : U_j \underset{F_j}{\rightleftarrows} U$ $\quad (F_j : U \to U_j,\ z \mapsto (z, f_j(z)))$
sind zueinander invers

Im Folgenden bezeichnet $f_{a,b_j} := f_j$.

16.11 Definition / Bemerkung

$\mathbb{C}\{z\}$ bezeichne den Ring der holomorphen Potenzreihen in z.

$\mathbb{C}[z] \subset \mathbb{C}\{z\} \subset \mathbb{C}[[z]]$

$\wedge$ merom. Laurentreihen Ring der formalen Pot-Reihen

$\mathbb{C}(z) \hookrightarrow \mathbb{C}\{z\}[z^{-1}] \subset \mathbb{C}[[z]][z^{-1}]$

Quot-körper Laurentreihenentw. formale merom. Laurentreihen

16.12 Satz

Sei $a \in V$ ein fester Punkt, $(a,b) \in \tilde{V}$ und $f: U = U(a) \to \mathbb{C}$ eine (holomorphe) Auflösung der Gleichung $P(z,w) = 0$ nach w, also $P(z, f(z)) \equiv 0$ und $f(a) = b$.
Sei $f_{a,b} \in \mathbb{C}\{z-a\}$ die Potenzreihenentwicklung von f in a.
Die Riemann'sche Fläche der analytischen Fortsetzungen von f entlang von Wegen in V ist isomorph zu $\tilde{V}$.

Beispiel: $P(z,w) = w^2 - z$,
dann ist $V = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
und $\tilde{V} \to V$ die 2-blättrige Überlagerung von $\sqrt{z}$.
In diesem

$$\begin{array}{ccc} \tilde{V} = \{w \mid w \neq 0\} \cong \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ \downarrow \quad\quad \overset{w}{\downarrow} \\ V \quad\quad z = w^2 \end{array}$$

Beweis mit Hilfe von Galois-Theorie:

Beweis: Sei $g: U(\gamma) \to \mathbb{C}$ eine analytische Fortsetzung entlang eines Weges $\gamma: [0,1] \to V$, $U(\gamma)$ eine Umgebung von $\gamma([0,1])$.

Dann gilt

$$P(z, g(z)) \equiv 0 \text{ auf } U(\gamma)$$

da $P(z, g(z))|_U = P(z, f(z)) \equiv 0$ auf $U = U(a)$ nach dem Identitätssatz.

Für jeden Punkt $c = \gamma(t)$ ist also $g|_{U(c)}$ eine lokale Auflösung von $P(z,w)$ nach w.

Insbesondere kommen als Werte $g(c)$ nur die endlich vielen Nullstellen von $P(c,w) \in \mathbb{C}[w]$ in Betracht.

Sei nun (c,d) ein beliebiger Punkt von $\tilde{V}$ und $f_{c,d}$ die lokale Lösung mit $f_{c,d}(c) = d$, dann ist die Zuordnung

$$\tilde{V} \to \mathcal{O},$$
$$(c,d) \mapsto f_{c,d}$$

injektiv, da die lokale Lösung $f_{c,d}$ durch $f_{c,d}(c) = d$ als Potenzreihe in $z-c$ eindeutig bestimmt ist.

Wegen des Identitätssatzes ist also

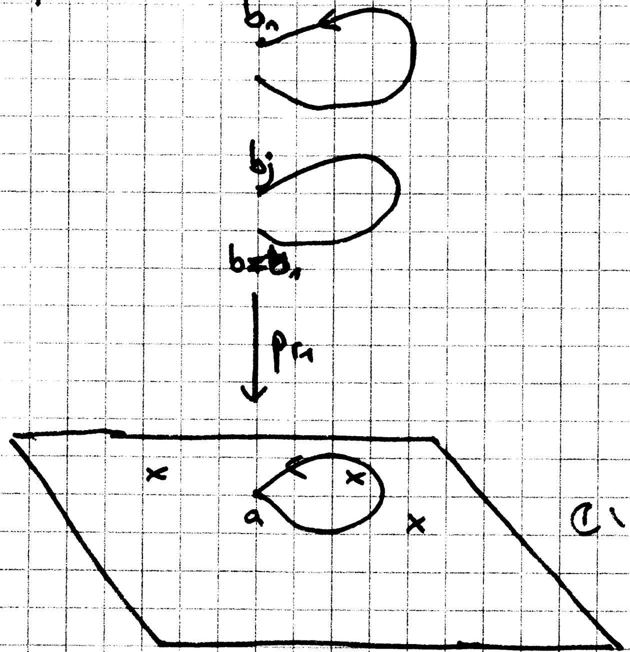
$$R(f) = \text{Riemann'sche Fläche von } f \subset \text{Bild}(\tilde{V} \to \mathcal{O})$$

Was.

Die wesentliche Aussage ist

$$R(f) = \text{Bild}(\tilde{V} \to \mathcal{O}) \cong \tilde{V} \subset \mathcal{O}$$

Mit anderen Worten ist (a, b_2) eine andere Lösung von $P(a,w)=0$, dann lässt sich $f_{a,b}$ entlang eines geschlossenen Weges γ mit $AP = EP\ a$ in V nach $f_{a,b}$ fortsetzen.



$\mathbb{C} \setminus$ Nullst. von aR

Nummerieren wir die Nullstellen $b_1, \dots, b_n$ von $P(a,w)$ durch so sehen wir, dass die analytische Fortsetzung entlang eines geschlossenen Weges

$f_{a,b_i} \longrightarrow f_{a,b_j}$

für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ liefert

Dies ordnet jeden geschlossenen Weg γ mit $AP = EP = a$ eine Permutation

$s_\gamma \in S_n$

wobei $s_\gamma(i) = j$, falls f_{a,b_i} nach f_{a,b_j} fortgesetzt wird

Def.: Die Monodromiegruppe $\tilde{V} \longrightarrow V$ ist die von diesen Elementen s_γ, γ geschlossen, erzeugte Untergruppe von S_n: $\langle s_\gamma \mid \gamma \text{ geschlossen} \rangle$

[$\pi_1(\mathbb{C}\setminus B, a) \to S_n$ das Bild der Monodromiegruppe]

Erinnerung / Einführung in Galoistheorie

Sei K ein Körper, $P \in K[w]$ ein (irreduzibles) Polynom von Grad n und $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sämtliche Nullstellen von P in einem Oberkörper $\hat{K}$ von K.

Algebraisch lassen sich Nullstellen α_i, α_j nun nicht unterscheiden,

$$K[\alpha_j] \xleftarrow{\cong} K[w]/P \xrightarrow{\cong} K[\alpha_i] \quad (P \text{ irreduzibel}),$$
$$\alpha_j \leftarrow w \qquad w \mapsto \alpha_i$$

P ist das Minimalpolynom von α_j und α_i bis auf Normierung.

Galoistheorie beschäftigt sich mit den Symmetrien der Nullstellenmenge.

Setzen

$$L = K[\alpha_1, \dots, \alpha_n] \subset \hat{K}.$$

L ist der Zerfällungskörper von $P \in K[w]$,

$$P(w) = a_n \cdot \prod_{j=1}^{n} (w - \alpha_j)$$

L ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Das "bis auf" misst die Galoisgruppe.

Def.: Die Galoisgruppe von P bzw. der Körpererweiterung $K \subset L$

$$\mathrm{Gal}(P) := \mathrm{Gal}(L/K) = \{ \varphi \in \mathrm{Aut}(L) \mid \varphi|_K = \mathrm{id}_K \}$$

Satz: L Zerfällungskörper von P irred., char(K) = 0

Dann ist L/K galoisch,

d.h. es existieren viele Automorphismen,

$\# \mathrm{Gal}(L/K) = [L:K]$

$G := \mathrm{Gal}(L/K) = \mathrm{Gal}(P)$ operiert auf den Nullstellen durch Vertauschen

$L = K[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ und durch die Operation auf der Menge $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ist die Operation von G auf $K[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ festgelegt.

Nach Durchnummerieren der Nullstellen, können wir G als eine Untergruppe von S_n auffassen.

Hauptsatz der Galoistheorie:

L/K Zerfällungskörper, char(K) = 0,

$$\{\underbrace{H \subset \mathrm{Gal}(L/K)}_{\text{Untergruppe}}\} \longleftrightarrow \{M \mid K \subset M \subset L \text{ Zwischenkörper}\}$$

$$H \longmapsto \mathrm{Fix}(H) = \{l \in L \mid \varphi(l) = l \quad \forall \varphi \in H\}$$

$$\mathrm{Gal}(L/M) \longleftarrow M$$

sind inklusionsumkehrende Bijektionen.

Bemerkung: In unserer Anwendung:

$$K = \mathbb{C}(z) \subset \tilde{K} = \underbrace{\mathbb{C}\{z-a\}[(z-a)^{-1}]}_{\text{Laurentreihen-entw. von a}}$$

$L = K[f_{a,b_1}, \dots, f_{a,b_n}]$ ist ein Zerfällungskörper,

da $P(z,w) = a_n(z) \prod_{j=1}^{n} (w - f_{a,b_j})$

Sei $G \subset S_n$ die Monotoniegruppe

$$G = \langle s_\gamma \mid \gamma \text{ Schleife} \rangle \subset S_n$$

Satz: $G \subset \mathrm{Gal}(L \mid \mathbb{C}(z))$

Beweis: $\mathbb{C}(z)[t_1, \dots, t_n] \to L$

$$t_j \longmapsto f_{a,b_j}$$

ist ein surjektiver Ringhomomorphismus.

Zu zeigen ist:

Ist $F = F(t_1, \dots, t_n) \in \mathrm{Ker}(\Phi)$

$\Rightarrow F(t_{s_\gamma(1)}, \dots, t_{s_\gamma(n)}) \in \mathrm{Ker}(\Phi)$

Folgt mit analytischer Fortsetzung

$F(z, f_{a,b_1}, \dots, f_{a,b_n}) \equiv 0$

$\Rightarrow F(z, f_{a,b_{s_\gamma(1)}}, \dots, f_{a,b_{s_\gamma(n)}}) \equiv 0$

$\square$

Satz: $\mathrm{Fix}(G) = \mathbb{C}(z)$

Beweis: