2016-05-19
(7)

II Umlaufzahl und Residuen

7. Umlaufzahlen

7.1 Zählen

Sei A eine Menge. Die freie abelsche Gruppe F_A erzeugt von den Elementen von A besteht aus allen endlichen Summen $a = \sum_{k=1}^{N} n_k a_k$, wobei $n_k \in \mathbb{Z}$, $a_k \in A$ p.v.

Man sagt a_k kommt in a n_k-mal vor.

Offensichtlich kann man solche endlichen Summen addieren und subtrahieren.

F_A ist eine abelsche Gruppe.

Im Folgenden wollen wir für ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ eine Gruppe $H_1(G)$ einführen, die die topologische Komplexität von G misst. Dazu betrachten wir die freie abelsche Gruppe, die von allen Integrationswegen $\gamma : [a,b] \to G$ erzeugt wird. Die Elemente dieser Gruppe nennt man **Ketten**. Sie haben die Gestalt $\Gamma = \sum_{j=1}^{k} n_j \gamma_j$.

Die **Spur** von Γ ist $Sp\Gamma = \bigcup_{i=1}^{k} Sp\gamma_i$, wobei $n_j \neq 0$.

$Sp(\Gamma_1 + \Gamma_2) \subset Sp\Gamma_1 \cup Sp\Gamma_2$, aber es gilt nicht notwendigerweise Gleichheit, da Summanden sich wegheben können.

Eine Kette $\Gamma = \sum_{j=1}^{k} n_j \gamma_j$ heißt **geschlossen** (oder auch **Zykel**), wenn jeder Punkt $z \in \mathbb{C}$ unter Berücksichtigung der Vielfachheiten genauso oft als Anfangspunkt sowie als Endpunkt von den γ_j auftaucht:

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \sum_{j,\ \text{Anfangspunkt von } \gamma_j = z} n_j = \sum_{j,\ \text{Endpunkt von } \gamma_j = z} n_j$$

Beispiel: 7.3

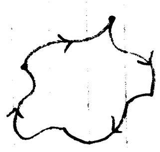
1) $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, γ^- der umgekehrte Weg, $\gamma + \gamma^-$ ist ein Zykel

$\gamma_1, \ldots, \gamma_k : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(0), \ldots, \gamma_{n-1}(1) = \gamma_n(0)$, $\gamma_n(1) = \gamma_1(0)$,

dann ist $\gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ ein Zykel.

Ist $f : G \to \mathbb{C}$ holomorphe (oder stetig) Funktion und Γ ein Zykel in G, so

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{k} n_j \int_{\gamma_j} f(z)\,dz$$



7.4 Satz

Eine stetige Funktion $f: G \to \mathbb{C}$ ist holomorph genau dann, wenn für jeden Zykel Γ in G $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$

BEWEIS

Dies ist nur eine Umformulierung von Satz 3.13. ☒

7.5 Definition

Sei Γ ein Zykel in $\mathbb{C}$ um $z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp}\Gamma$. Dann ist die **Umlaufzahl** von Γ um z durch $n(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\zeta - z}\,d\zeta$ definiert

7.6 Bemerkung & Beispiele

1) Für $\Gamma = \partial D$ Rand einer Kreisscheibe gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen, $z \in D$
$$n(\Gamma, z) = \begin{cases} 1, & \text{falls } z \in \mathring{D} \\ 0, & \text{falls } z \notin D \end{cases}$$

2) Die Definition der Umlaufzahl ist nicht geometrisch. Wir werden erst nach und nach sehen, dass sie unserer Anschauung entspricht.

7.7 Satz

Sei Γ ein Zykel und $z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp}\Gamma$. Dann ist $n(\Gamma, z) \in \mathbb{Z}$.

BEWEIS

Es sei $\Gamma = \sum_{j=1}^{k} n_j \gamma_j$. Umparametrisierung der γ_j ändert die Integrale nicht. Wir können daher annehmen, dass alle $\gamma_j: [0,1] \to \mathbb{C}$ (auf dem Einheitsintervall definiert sind).

Für $t \in [0,1]$ sei $h(t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{k} n_j \int_0^t \frac{\gamma_j'(s)}{\gamma_j(s) - z}\,ds$

Dann gilt $h(0) = 0$ und $h(1) = n(\Gamma, z)$.

Wir werden zeigen, dass $e^{2\pi i h(1)} = 1$, woraus die Behauptung folgt, da $e^{2\pi i w} = 1 \Leftrightarrow w \in \mathbb{Z}$.

$h(t)$ ist diffbar, also auch die Funktion $g(t) = e^{-2\pi i h(t)} \cdot \prod_{j=1}^{k} (\gamma_j(t) - z)^{n_j}$

2016-05-19 (7)

Es gilt $g'(t) = e^{-2\pi i h(t)} \prod_{j=1}^{k} (\gamma_j(t)-z)^{n_j} \times \underbrace{\left(-2\pi i h'(t) + \sum_{j=1}^{k} \frac{n_j \gamma_j'(t)}{(\gamma_j(t)-z)}\right)}_{=0}$

Also ist g konstant auf $[0,1]$ und daher
$\prod_{j=1}^{k} (\gamma_j(t)-z)^{n_j} = c \cdot e^{2\pi i h(t)}$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{C}$.

$c \neq 0$, da die linke Seite nicht verschwindet.

Da $\prod_{j=1}^{k} (\gamma_j(0)-z)^{n_j} = \prod_{j=1}^{k} (\gamma_j(1)-z)^{n_j}$ gilt, ist $d\Gamma$ ein Zykel.

Also $\forall w \in \mathbb{C}: \sum_{j:\ \gamma_j(0)=w} n_j = \sum_{j:\ \gamma_j(1)=w} n_j$

Es folgt: $e^{2\pi i h(0)} = e^{2\pi i h(1)}$, wie gewünscht. ▨

Folgerung:

Die Funktion $z \mapsto n(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$ ist auf $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}\,\Gamma$ stetig, da der Integrant stetig von z abhängt. Da die Funktion ganzzahlig ist folgt, dass $n(\Gamma, z)$ konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}\,\Gamma$. Ferner gilt auf der Zusammenhangskomponente $\frac{1}{\zeta - z} \xrightarrow{z\to\infty} 0$, also $n(\Gamma, z) = 0$ auf der unbeschränkten Komponente. Also:

7.8 Satz

Die Umlaufzahl $n(\Gamma, z)$ ist konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}\,\Gamma$ und 0 auf der unbeschränkten Komponente. ▨

7.9 Definition

Sei Γ ein Zykel in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Γ heißt **nullhomolog** in G, wenn für jeden Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus G$ $n(\Gamma, z) = 0$ gilt.

7.10 Satz (Allgemein Cauchyscher Integralsatz und Integralformel)

Es sei Γ ein nullhomologer Zykel in G und $f: G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion

Dann gilt:

1) $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$
2) Für $z \in G \setminus \mathrm{Sp}\,\Gamma$ und $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gilt: $n(\Gamma, z) \cdot f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$

BEWEIS

Wir zeigen zunächst (2) für den Fall $k=0$.

Der allgemeine Fall (2), $k \geq 0$ folgt hieraus durch Differentiation unter dem Integral.

Setzen wir in die Behauptung die Definition der Umlaufzahl

$$n(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\zeta - z}\, dz$$

ein, so nimmt die Behauptung die Form $\int_\Gamma \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} d\zeta \overset{!}{=} 0$ an.

Dazu zeigen wir zunächst, dass sich $h(z) = \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph fortsetzen lässt.

Wir betrachten den Integranten als Funktion um z und ζ gleichzeitig

$$g(z,\zeta) \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} & , \zeta \neq z \quad \text{als Funktion auf } G \times G \\ f'(z) & , \zeta = z \end{cases}$$

g ist auf $G \times G$ stetig. Für $(\zeta_0, z_0) \in G \times G$ mit $\zeta_0 \neq z_0$ ist dies klar.

Für $\zeta_0 = z_0$ müssen wir $g(\zeta, z) - g(z_0, z_0)$ untersuchen.

a) falls $\zeta = z$, gilt $g(z,z) - g(z_0, z_0) = f'(z) - f'(z_0) \xrightarrow{z \to z_0} 0$, da f' stetig ist

b) Im Fall $\zeta \neq z$ $\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} - f'(z_0) = g(\zeta, z) - g(z_0, z_0)$

$$= \frac{1}{\zeta - z} \int_{[z,\zeta]} (f'(w) - f'(z_0))\, dw$$

Also $|g(\zeta,z) - g(z_0,z_0)| \leq \frac{1}{|\zeta - z|} |\zeta - z| \sup_{w \in [z,\zeta]} |f'(w) - f'(z_0)| \xrightarrow[(z,\zeta) \to z_0]{} 0$

Sei nun $h_0(z) = \int_\Gamma g(\zeta, z)\, d\zeta$. h_0 ist eine auf ganz G stetige Funktion. Sie ist sogar holomorph, da nach dem Satz von Morera für jedes Dreieck $\Delta \subset G$ $\int_{\partial\Delta} h_0(z)\, dz = 0$. (ist noch zu zeigen)

Nach Fubini gilt:

$$\int_{\partial\Delta} h_0(z)\, dz = \int_{\partial\Delta} \left(\int_\Gamma g(\zeta, z)\, d\zeta \right) dz = \int_\Gamma \left(\int_{\partial\Delta} g(\zeta, z)\, dz \right) d\zeta$$

Für festes ζ ist $g(\zeta, z)$ stetig und für $z \neq \zeta$ holomorph.

$$\int_{\partial\Delta} g(\zeta, z)\, dz = 0 \qquad \text{also} \qquad \int_\Gamma \left(\int_{\partial\Delta} g(\zeta,z)\, dz \right) d\zeta = 0$$

2016-05-19 (7)

Bisher haben wir die Voraussetzung an Γ noch nicht verwendet.

Sei $G_1 = \{ z \in \mathbb{C} \setminus Sp\,\Gamma \mid n(\Gamma, z) = 0 \}$. Unsere Voraussetzung besagt, dass $G \cup G_1 = \mathbb{C}$.

Auf $G \cap G_1$ lässt sich h_0 einfach beschreiben:

$$h_0(z) = \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta =: h_1(z)$$

da $$\int_\Gamma \frac{f(z)}{\zeta - z} \, d\zeta = 2\pi i \, f(z) \, n(\Gamma, z) = 0$$

h_1 ist auf ganz G_1 holomorph. Also ist $$h(z) = \begin{cases} h_0(z) & \text{für } z \in G \\ h_1(z) & \text{für } z \in G_1 \end{cases}$$

eine wohldefinierte ganze Funktion. Für $z \in G_1$ gilt:

$$|h(z)| = |h_1(z)| \leq \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \Gamma)} \max_{\zeta \in Sp\,\Gamma} |f(\zeta)| \cdot L(\Gamma) \quad , \text{ wobei } \Gamma = \sum n_j \gamma_j \, , \; L(\Gamma) = \sum n_j L(\gamma_j)$$

Für $z \to \infty$ strebt $h(z) \to 0$. Also ist h eine beschränkte ganze Funktion.

Und wegen $h(z) \xrightarrow[z \to \infty]{} 0$ folgt $h(z) \equiv 0$ und wegen dem Satz von Liouville konstant.

Damit ist (2) gezeigt.

Zu (1): Zu $a \in G \setminus Sp\,\Gamma$ betrachten wir die Funktion $F(z) = f(z)(z-a)$

F ist auf G holomorph und nach (2) $\quad 0 = n(\Gamma, a) F(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{F(\zeta)}{\zeta - a} \, d\zeta$

und $F(a) = 0$ $\quad = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\zeta) \, d\zeta$

$\boxtimes$