2016-06-13

Kapitel 3: Folgen holomorpher Funktionen

11. Kompakte Konvergenz

11.1 Definition

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Folge (f_n) von Funktionen auf G heißt **kompakt konvergent**, wenn sie auf jeder kompakten Teilmenge von G gleichmäßig konvergiert.

11.2 Satz (Weierstraß)

Sei (f_n) eine kompakte konvergente Folge holomorpher Funktionen. Dann ist die Grenzfunktion f ebenfalls holomorph und die Folge der Ableitungen (f'_n) konvergiert kompakt gegen f'.

BEWEIS

Wegen der lokal gleichmäßigen Konvergenz ist f stetig und nach §A, Satz A.2 und nach dem Satz von Morera ist f holomorph.

Für die zweite Aussage verwenden wir die Cauchysche Integralformel

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \, d\zeta$$

Für $z_0 \in G$ und $0 < \varepsilon << 1$ so klein, dass $\overline{D_\varepsilon(z_0)} \subset G$ liegt, folgt für $z \in D_{\varepsilon/2}(z_0)$

$$f_n'(z) - f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon(z_0)} \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \, d\zeta \xrightarrow{n \to \infty} 0 ,$$

da $\frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$ auf $\partial D_\varepsilon \times D_{\varepsilon/2} = \{(\zeta, z)\}$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert. ☒

11.3 Satz

Sei G ein Gebiet und (f_n) eine auf G kompakt gegen f konvergente Folge holomorpher Funktionen. Hat jedes f_n in G höchstens N w-Stellen, dann ist f entweder konstant $\equiv w$ oder hat ebenfalls höchstens N w-Stellen (jeweils mit Vielfachheit gezählt).

BEWEIS

OE $w=0$, da wir f_n durch $f_n - w$ ersetzen können. Sei f nicht konstant Null und $z_1,..,z_r \in G$ Nullstellen von f.

Nach dem Identitätssatz liegen die Nullstellen von f diskret in G. Es gibt daher $\varepsilon > 0$, so dass die Kreisscheiben $K_j = \{z \mid |z - z_j| \leq \varepsilon\}$ in G liegen, disjunkt sind und z_j die einzige Nullstelle von f in K_j ist.

Sei $\delta > 0$, so dass $|f(z)| \geq \delta$ auf der kompakten Menge $\partial K_1 \cup .. \cup \partial K_r$ gilt.

Wählen wir nun n so groß, dass $|f(z) - f_n(z)| < \delta$ auf $\partial K_1 \cup .. \cup \partial K_r$ gilt, so hat für jedes $\tau \in [0,1]$ die Funktion $h_\tau = (1-\tau) f + \tau \cdot f_n$ keine Nullstellen auf $\partial K_1 \, .. \cup \partial K_r$.

Nach dem Satz von Rouché haben f und f_n auf $\partial K_1 \cup .. \cup \partial K_r$ genau so viele Nullstellen. f hat also genauso viele oder weniger Nullstellen wie die f_n.

$\boxtimes$

11.4 Definition

Eine **schlichte** Funktion auf einem Gebiet ist eine injektive holomorphe Funktion.

11.5 Korollar

Der Grenzwert f einer kompakten konvergenten Folge schlichter Funktionen ist entweder konstant oder ebenfalls schlicht.

BEWEIS

Nach Satz 11.3 ist f konstant oder jeder Wert $w \in \mathbb{C}$ tritt ebenfalls wie bei den f_n höchstens einmal auf.

$\boxtimes$

Wir fragen jetzt nach Kriterien, die die kompakte Konvergenz einer Folge (f_n) holomorpher Funktionen garantiert.

2016-06-13 **11.6 Definition**

Eine Folge (f_n) heißt **lokal beschränkt**, wenn es zu jedem $z_0 \in G$ eine Umgebung U von z_0 gibt, auf der die Folge (f_n) beschränkt ist, d.h.

$\exists c > 0$, so dass $|f_n(z)| < c \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in U$.

11.7 Satz

Ist (f_n) eine lokal beschränkte Folge auf dem Gebiet G von holomorpher Funktionen, die auf einer in G dichten Teilmenge punktweise konvergiert, dann ist (f_n) kompakt konvergent auf G.

BEWEIS

Zu zeigen ist die lokale gleichmäßige Konvergenz, d.h. dass das Cauchy-Kriterium lokal gleichmäßig erfüllt ist.

Also zu zeigen ist

$\forall z_0 \in G \ \exists r > 0$, so dass $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon$

$\forall n, m \geq n_0 \ \forall z$ mit $|z - z_0| \leq r$.

Wir wollen die Konvergenz einer dichten Teilmenge ausnutzen.

Sei a in dieser Teilmenge. Dann gilt:

$$|f_n(z) - f_m(z)| = |f_n(z) - f_n(a) + f_n(a) - f_m(z) - f_m(a) + f_m(a)|$$
$$\leq |f_n(z) - f_n(a)| + |f_n(a) - f_m(a)| + |f_m(a) - f_m(z)|$$

Um $|f_n(z) - f_n(a)|$ abzuschätzen, zeigen wir, dass die lokale Beschränktheit für holomorphe Funktionen gleichgradige Stetigkeit impliziert.

Dazu wählen wir zunächst ein r', so dass

$|f_n(z)| \leq c \quad \forall z$ mit $|z - z_0| \leq r'$ gilt.

Dann gilt für $0 < r < \frac{r'}{2}$ und $z, z' \in D_{r'}(z_0)$:

$$|f_n(z) - f_n(z')| = \left|\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{r'}(z_0)} \left(\frac{f_n(\xi)}{\xi - z} - \frac{f_n(\xi)}{\xi - z'}\right) d\xi\right|$$
$$= \frac{|z - z'|}{2\pi} \left| \int_{\partial D_{r'}(z_0)} \frac{f_n(\xi)}{(\xi - z)(\xi - z')} d\xi \right|$$
$$\leq \frac{|z - z'|}{2\pi} \, 2\pi r' \, \frac{c}{(\frac{1}{2}r')^2} = \frac{4c}{r'} |z - z'| \qquad \forall n$$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen endlich viele Punkte $a_1, \dots, a_N$ in $\{z \mid |z-z_0| < r\}$, so dass jedes z mit $|z-z_0| \leq \tau$ Abstand höchstens $\frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{r'}{4c}$ von einem a_j hat. (a_j liegen in der dichten Teilmenge)
Dies ist möglich, da die Menge der konvergenten Punkte dicht liegt und $\{z \mid |z-z_0| \leq r\}$ in G kompakt ist. Dann sei n_0 so gewählt, dass

$$|f_n(a_j) - f_m(a_j)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n, m \geq n_0 \text{ und alle } j = 1, \dots, N \quad \text{gilt.}$$

Für z mit $|z-z_0| \leq \tau$ und $n, m \geq n_0$ gilt dann:

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f_m(z)| &\leq |f_n(z) - f_n(a_j)| + |f_n(a_j) - f_m(a_j)| + |f_m(a_j) - f_m(z)| \\ &\leq \frac{4c}{r'} |z - a_j| + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{4c}{r'} |z - a_j| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

$\boxtimes$

11.8 Satz (Satz von Montel)

Jede lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen auf einem Gebiet besitzt eine kompakt konvergente Teilfolge.

BEWEIS

Nach dem Vorausgegangenen brauchen wir nur eine in G dichte Teilmenge M finden, auf der eine Teilfolge punktweise konvergiert. Dazu wählen wir eine (beliebige) abzählbare dichte Teilmenge $M = \{a_1, a_2, \dots\} \subset G$.
Wegen der lokalen Beschränktheit existiert eine Teilfolge $f_{1,1}, f_{1,2}, f_{1,3}, \dots$ von f_n, die an der Stelle a_1 konvergiert und jeweils Teilfolge $(f_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ von $(f_{i-1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ die zusätzlich auch in a_i konvergiert.
Die Folge $(f_{n,n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert dann in allen Punkten $\{a_1, a_2, \dots\}$, also nach Satz 11.7 kompakt konvergent auf G.

$\boxtimes$

11.9 Satz (Häufungspunktkriterium für lokal beschränkte Folgen)

Sei G ein Gebiet und (f_n) eine lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen, deren Konvergenzmenge (= die Menge der Punkte $a \in G$, wo $f_n(a)$ konvergiert) einen Häufungspunkt in G hat.
Dann konvergiert (f_n) kompakt.

2016-06-13 BEWEIS

Nach Satz 11.7 reicht es die punktweise Konvergenz zu zeigen.

Wir wählen zunächst mit dem Satz von Montel eine konvergente Teilfolge.

Sei f dann Grenzfunktion.

/A: Es gibt ein $a \in G$, sodass $(f_n(a))$ nicht gegen $f(a)$ konvergiert. Dann existiert eine Teilfolge (f_{n_n}) die bei a gegen ein $w \neq f(a)$ konvergiert. Nach Montel exist. eine konvergente Teilfolge $(f_{n_{n_j}})$ von (f_{n_n}). Sei g deren Grenzfunktion.

Nach Voraussetzung hat die Menge

$\{z \in G \mid f(z) = g(z)\}$ einen Häufungspunkt in G.

Also gilt $f = g$ nach Identitätssatz $\lightning$ zu $f(a) \neq w = g(a)$

☒

11.10 Satz (Ableitungskriterium für lokal beschränkte Folgen)

Sei G ein Gebiet, (f_n) eine lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen.

An einem Punkt $z_0 \in G$ konvergiert für jedes $h \geq 0$ die Folge $((f_n^{(n)})(z_0))_{n \in \mathbb{N}}$.

Dann konvergiert (f_n) kompakt.

BEWEIS

Nicht-Konvergenz impliziert wie oben die Existenz konvergenter Teilfolgen mit Grenzwerten f und g mit $f(a) \neq g(a)$.

Satz über die kompakte Konvergenz der Ableitung (11.2) für beide Folgen angewendet ergibt: $f^{(n)}(z_0) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0) \quad \forall n \geq 0$

Nach dem Identitätssatz ist also $f = g$, ein $\lightning$

☒

2016-06-16

12. Der Riemannsche Abbildungssatz

12.1

Im Folgenden bezeichne $E := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ den Einheitskreis.

12.2 Satz (Schwarzsches Lemma)

Sei $f: E \to E$ eine holomorphe Abbildung mit $f(0)=0$.

Dann gilt $|f(z)| \leq z$ und $|f'(0)| \leq 1$

Gilt für ein $z_0 \neq 0$ in E $|f(z_0)| = |z_0|$ oder $|f'(0)| = 1$, so existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$,

so dass $f(z) = e^{i\lambda} z$ (f ist also eine Drehung)

BEWEIS

Wir betrachten $g(z) = \frac{f(z)}{z}$.

g ist im Nullpunkt holomorph fortsetzbar mit $g(0) = f'(0)$.

Also g ist holomorph in E. Für $|z| \leq r < 1$ gilt nach dem Maximumsprinzip

$|g(z)| \leq \max\limits_{|\xi|=r} \left(\frac{|f(\xi)|}{r} \right) \leq \frac{1}{r}$, da $f(E) \subset E$.

Für $r \to 1$ folgt $|g(z)| \leq 1$, d.h. $|f(z)| \leq |z|$ und $|f'(0)| \leq 1$

Die Gleichung $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z_0)| = |z_0|$ hat zur Folge, dass das Maximum im Innern des Einheitskreises angenommen wird.

g ist dann also konstant und $|g(z)| \equiv 1$, also $g(z) = e^{i\lambda}$ und $f(z) = e^{i\lambda} \cdot z$ ☒

12.3 Bemerkung

Für $z_0 \in E$ definiert $f_{z_0}(z) := \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$ ein Automorphismus von E.

BEWEIS

Für $z \in \partial E$, also $\bar{z} z = 1$, gilt $f_{z_0}(z) \cdot f_{z_0}(z) = \frac{(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)}{(1 - \bar{z}_0 z)(1 - z_0 \bar{z})}$

$$= \frac{z\bar{z} - (z\bar{z}_0 + z_0\bar{z}_0) + z_0\bar{z}_0}{1 - (\bar{z}_0 z + z_0 \bar{z}) + \bar{z}_0 z \bar{z}_0 z} = 1$$

Also $f(\partial E) \subset \partial E$. Da außerdem $f_{z_0}(z_0) = 0$, muss $f_{z_0}(E) \subset E$ nach dem Maximumsprinzip gelten. Um einzusehen, dass f_{z_0} bijektiv ist, geben wir die Umkehrabbildung an .

$$w = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \Leftrightarrow w - w\bar{z}_0 z = z + z_0$$

$$\Leftrightarrow z(1 + w\bar{z}_0) = w + z_0$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{w + z_0}{1 + \bar{z}_0 w}$$

Die Umkehrabbildung von f_{z_0} ist also f_{z_0}. ☑

Mit Hilfe des Schwarzschen Lemmas können wir nun sämtliche Automorphismen des Einheitskreises bestimmen.

12.4 Satz

Es sei $f: E \to E$ eine biholomorphe (bijektiv holomorph $\Rightarrow$ Umkehrabbildung ebenfalls holomorph) Abbildung.
Dann existiert ein $z_0 \in E$ und $\lambda \in [0, 2\pi[$, so dass $f(z) = e^{i\lambda} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$ gilt.

BEWEIS

Wir betrachten die Umkehrabbildung $f^{-1}: E \to E$ und $z_0 = f^{-1}(0)$;
$g = f \circ f_{z_0}^{-1} : E \to E$ ist dann ein Automorphismus von E mit $g(0) = 0$.
Nach dem Schwarzschen Lemma gilt $|g'(0)| \leq 1$. Dasgleiche gilt für die Umkehrabbildung $g^{-1} = f_{z_0} \circ f^{-1}$: $g^{-1}(0) = 0$ und somit $|(g^{-1})'(0)| \leq 1$.
Andererseits gilt $g^{-1} \circ g = id_E$.
Also $\underbrace{(g^{-1})'(g(0)) \cdot g'(0)}_{= (g^{-1})'(0) \cdot g'(0)} = 1$

und somit $|(g^{-1})'(0)| \cdot |g'(0)| = 1$.
Da beide Faktoren den Betrag ≤ 1 haben, muss Gleichheit gelten. Das Schwarzsche Lemma gibt somit $g(z) = e^{i\lambda} z$, $\lambda \in [0, 2\pi[$
und somit $f(z) = (g \circ f_{z_0})(z) = e^{i\lambda} \cdot \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$ ☑

12.5 Bemerkung

$Aut(E) = \{ f: E \to E \mid f \text{ ist biholomorph} \}$ hängt somit von drei reellen Parametern ab:

- $z_0 \in E$ (2 Parameter, Real- und Imaginärteil)

2016-06-16 • $\lambda \in [0, 2\pi]$ (1 Parameter)

• $\mathrm{Aut}(E) \cong S^1 \times E$

12.6 Satz (Riemannscher Abbildungssatz)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet $\neq \mathbb{C}$.

Dann existiert eine biholomorphe Abbildung $f: G \to E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$

Man kann dabei zusätzlich vorschreiben, dass ein beliebiger Punkt $z_0 \in G$ von f auf den Nullpunkt abgebildet wird ($f(z_0) = 0$) und $f'(z_0) \in \mathbb{R}_{>0}$

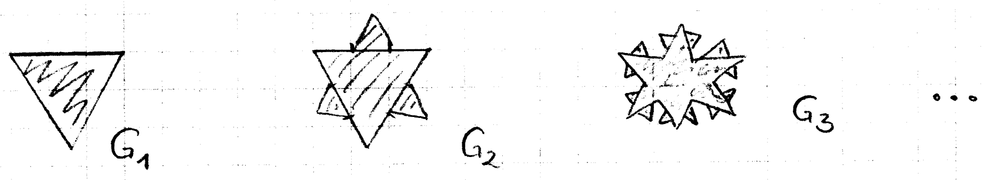
Durch diese zusätzliche Forderung wird f eindeutig festgelegt. durch Automorphismus des Einheitskreises

12.7 Bemerkung

Für $G = \mathbb{C}$ gibt es keine (!) biholomorphe Abbildung $f: \mathbb{C} \to E$, denn f wäre eine beschränkte ganze Funktion und somit konstant.

Umso erstaunlicher ist es, dass jedes andere einfach zusammenhängende Gebiet biholomorph zu E ist. Die Aussage ist keinesfalls trivial. Für beliebige einfach zusammenhängende Gebiete $G \subsetneq \mathbb{C}$ ist nicht einmal klar, dass es einen Homöomorphismus $G \to E$ gibt.

Beispielsweise ist dies unklar für das durch den rekursiven Prozess



$$G_\infty = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$$

definierte Gebiet G_∞ alles andere als klar.

Der Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes wird nahezu die gesamten Ergebnisse der Vorlesung verwenden.

12.8 BEWEIS

a) Die Eindeutigkeitsaussage ist leicht zu zeigen.

Sind $f, g: G \to E$ zwei biholomorphe Abbildungen mit $f(z_0) = 0 = g(z_0)$ und $f'(z_0), g'(z_0) \in \mathbb{R}_{>0}$, so ist $h = g \circ f^{-1}: E \to E$ ein Automorphismus mit

$h(0)=0$ und $h'(0) \in \mathbb{R}_{>0}$. Also $h(z) = e^{i\lambda} \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$ mit $z_0 = 0$ und $\lambda = 0$,

d.h. $h(z) = z = \mathrm{id}_E$ und somit $f = g$.

b) Existenz zeigen wir in mehreren Schritten. 2016-06-20

1) Zunächst konstruieren wir eine Abbildung ($\to$ injektive holomorphe Abb.)

$f_1: G \to G^* \subset E$ auf ein Teilgebiet von E.

Da $G \neq \mathbb{C}$, gibt es einen Punkt $a \in \mathbb{C} \setminus G$. Da G einfach zusammenhängend ist, existiert ein biholomorpher Zweig der Wurzelfunktion $g(z) = \sqrt{z-a}$

$g: G \to \mathbb{C}^*$ ist injektiv, da $g^2 + a = \mathrm{id}_G$. Sei w_0 im Bild von g.

Da das Bild wieder ein Gebiet ist, existiert ein $r > 0$, sodass

$\mathcal{D}_r(w_0) = \{ w \mid |w - w_0| < r \} \subset g(G)$

Da $-\mathcal{D}_r(w_0) = \underbrace{\{ w \mid -w \in \mathcal{D}_r(w_0) \}}^{= \mathcal{D}_r(-w_0)}$ mit der Abbildung $w \mapsto w^2 + a$, hat das gleiche Bild wie $\mathcal{D}_r(w_0)$ und ist wegen Injektivität von g

$\mathcal{D}_r(w_0) \cap g(G) = \emptyset$

Mit $f_1(z) = \frac{r}{\sqrt{z-a} + w_0}$ ist dann eine injektive holomorphe Abbildung auf G. Da $|\sqrt{z-a} + w_0| > r \quad \forall z \in G$, folgt $\left| \frac{r}{\sqrt{z-a} + w_0} \right| < 1$

Also $f_1: G \to E$.

Wir setzen $G^* = f_1(G)$. G^* ist dann ebenfalls einfach zusammenhängend. (nach dem Cauchyschen Integralsatz)

Indem wir noch einen Automorphismus $\varphi: E \to E$ dahinterschalten, (also f_1 durch $\varphi \circ f_1$ ersetzen)

können wir $f_1(z_0) = 0 \in G^*$ und $f_1'(z_0) \in \mathbb{R}_{>0}$ erreichen.

2) Wir betrachten injektive holomorphe Abbildungen ($\hat{=}$ schlichte Abbildungen)

$g: G^* \to E$ mit $g(0) = 0$ und $g'(0) > 0$

Zum Beispiel ist id_{G^*} so eine Abbildung.

Ist $\{ |z| \leq \varepsilon \} \subset G^*$, so gilt nach der Cauchyschen Integralformel

$$g'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varepsilon} \frac{g(z)}{z^2} \, dz$$

$$|g'(0)| \leq \frac{2\pi\varepsilon}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon} < \infty$$

Die möglichen Werte von $g'(0)$ solcher schlichten Funktionen $g: G^* \to E$

2016-06-20

mit $g(0)=0$ und $g'(0)\in\mathbb{R}_{>0}$ sind also beschränkt.

Wir können also eine Folge $g_n: G^* \to E$ von solchen schlichten Funktionen wählen mit

$$\lim_{n\to\infty} g_n'(0) = \sup\{g'(0) \mid g: G^* \to E,\ g(0)=0,\ g'(0)>0\} := M$$

Die g_n bilden dann eine Folge beschränkter Funktionen.

Nach dem Satz von Montel existiert eine konvergente Teilfolge (g_{n_k}).

Sei: $f_2(z) = \lim_{k\to\infty} g_{n_k}(z)$. f_2 ist dann holomorph und $f_2'(0) = M > 0$, also ist f_2 nicht konstant. Also ist f_2 ebenfalls schlicht.

(Hier verwenden wir den Satz von Rouche und damit den Residuensatz)

$f_2: G^* \to E$ ist also eine schlichte Funktion mit $f_2(0)=0$, $f_2'(0)>0$ maximal.

3) Wir zeigen, dass $f_2: G^* \to E$ auch surjektiv ist.

Angenommen $w_0 \in E$ liegt nicht im Bild. Wir betrachten dann die Abbildung

$h = f_{+w_0} \circ f_2$

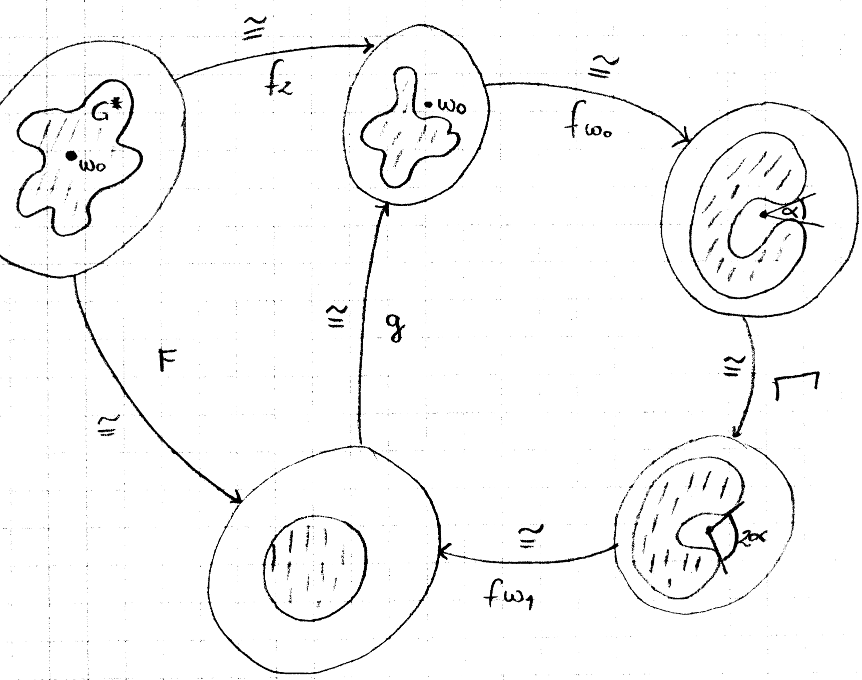
Da $f_{+w_0}(w_0) = 0$, gilt das Gebiet $\tilde{G} = h(G^*)$ enthält den Nullpunkt nicht.

Da auch $\tilde{G}$ einfach zusammenhängend ist, existiert auf $\tilde{G}$ ein Zweig der Wurzelfunktion $z \mapsto \sqrt{z}$.

$f_{z_0}(z) = \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z} \in \mathrm{Aut}(E)$, $f_{z_0}(z_0)=0$

Betrachten nun: $F = f_{w_1} \circ \sqrt{\ } \circ \underbrace{f_{+w_0} \circ f_2}_{h=}$, wobei $w_1 = \sqrt{h(0)}$

F ist dann eine schlichte Funktion $F: G^* \to E$ mit $F(0)=0$.



(Automorphismen)

Für $g = f_{w_0}^{-1} \circ (f_{w_1}^{-1})^2 = f_{-w_0} \circ (f_{-w_1})^2 : E \to E$ gilt $g(0) = 0$.

Da g auf ganz E definiert ist und kein Automorphismus (wegen der Wurzel) ist, gilt nach dem Schwarzschen Lemma $|g'(0)| < 1$.

Es folgt für $f_2 = g \circ F$

$$|f_2'(0)| = |\underbrace{g'(F(0))}_{|g'(0)|} - F'(0)| \quad , \text{ dass } |f_2'(0)| < |F'(0)|$$

$$\tilde{f}_2 = \frac{|F'(0)|}{F'(0)} \quad , F : G^* \to E \quad \text{mit } \tilde{f}_2'(0) = |F'(0)| > f_2'(0)$$

Dies widerspricht der Maximalität von $f_2'(0)$.

Also ist f_2 auch surjektiv.

$f = f_2 \circ f_1 : G \to E$ ist dann surjektiv und injektiv holomorph also biholomorph. Komponiert mit einer Rotation $z \mapsto e^{i\lambda} z$ erreichen wir noch $f(z_0) = 0$ UND $f'(z_0) > 0$ gilt.

$\boxtimes$

2016-06-20

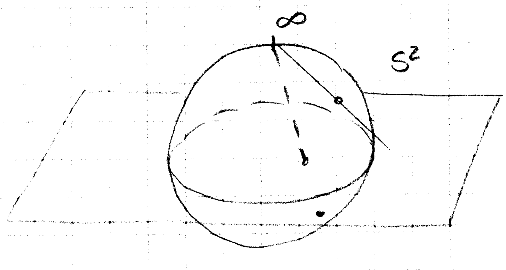
Nachtrag zu §10:

10.16 Satz

Sei $R(z)$ eine rationale Funktion. Dann nimmt R jeden Wert $w \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit Vielfachheit gezählt gleich oft in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ an.

Dabei ist die Vielfachheit von $R(\infty)$ die Vielfachheit des Werts von $R(\frac{1}{z})$ im Punkt $z=0$.

Einschub: (Skizze)



Riemannsche Zahlenkugel

$$S^2 = \underset{z}{\mathbb{C}} \cup \underset{w}{\mathbb{C}} \qquad w = \frac{1}{z}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & & \\ \cup & & \\ \mathbb{C}^* & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{C}^* \end{array}$$

BEWEIS

Sei r ein Radius, so dass das auf dem Kreis $\{|z|=r\}$ keine w- oder Polstelle von f liegt. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{R'(z)}{R(z)-w} \, dz = N_1 - P_1 ,$$

wobei N_1 die Anzahl der w-Stellen von R in $\{|z|<r\}$ und P_1 die Anzahl der Polstellen in $\{|z|<r\}$. Die Anzahl der $\overset{N_2}{w}$- und $\overset{P_2}{\text{Polstellen}}$ in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z|>r\} \cup \{\infty\}$ stimmt mit der Anzahl der w- und Polstellen der Funktion $R(\frac{1}{z})$ in dem Kreis $\{z \mid |z|<\frac{1}{r}\}$ überein.

Also $$N_2 - P_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\frac{1}{r}} \frac{\frac{d}{dz}(R(\frac{1}{z})-w)}{R(\frac{1}{z})-w} \, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\frac{1}{r}} \frac{R'(\frac{1}{z}) \cdot \frac{-1}{z^2}}{R(\frac{1}{z})-w} \, dz \qquad z = \frac{1}{r} e^{it}$$

Die Gesamtzahl $$N_1 + N_2 - (P_1 + P_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{R'(r e^{it})}{R(re^{it})-w} \, r i e^{it} \, dt$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{R'(\frac{1}{\frac{1}{r}e^{it}})(-(\frac{1}{r}e^{it})^{-2})}{R(r e^{-it})-w} \, \frac{i}{r} e^{it} \, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_0^{2\pi} \frac{R'(re^{it})}{R(re^{it})-w} \, r i e^{it} \, dt - \int_0^{2\pi} \frac{R(re^{it})}{R(re^{-it})-w} \, i r e^{-it} \, dt \right)$$

Das zweite Integral vereinfacht sich unter der Substitution $t \mapsto -t$ zu

$$-\int_0^{-2\pi} \frac{R'(re^{it})}{R(re^{it})-\omega}\, ire^{it}\, dt = -\int_{-2\pi}^{0} \frac{R'(re^{it})}{R(re^{it})-\omega}\, ire^{it}\, dt$$

$$= - \text{erstes Integral}$$

Also $N_1 + N_2 - (P_1 + P_2) = 0 \Leftrightarrow N_1 N_2 = P_1 P_2$

$\square$