Funktionentheorie

0. Komplexe Zahlen

2016-04-21 (1)

0.1

Die Gleichung $x^2+1=0$ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$.

Historisch wurden komplexe Zahlen durch Einführen einer symbolischen oder „imaginären" Lösung i die Gleichung eingeführt.

Mit i kann man dann "komplexe" Ausdrücke der Form

$$a+ib \quad , a,b \in \mathbb{R},$$

bilden und diese lassen sich addieren und multiplizieren

$$(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2) = (a_1+a_2)+i(b_1+b_2)$$
$$(a_1+ib_1)\cdot(a_2+ib_2) = a_1a_2-b_1b_2+i(a_1b_2+b_1a_2)$$

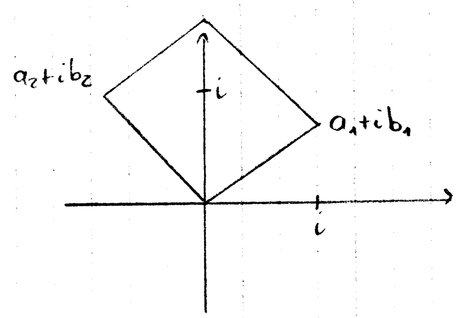
da $\quad i^2=-1$.

Bei diesem Vorgehen stellt sich die Frage "was ist i" und "kann rechnen mit i zu Widersprüchen führen"?

0.2

Von Gauß stammt die Interpretation von komplexen Zahlen $a+ib$ als Punkte $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ in der Ebene. Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist also lediglich die $\mathbb{R}^2$ auf der wir au spezielle Weise eine Addition und Multiplikation erklärt haben.

Die Addition ist die übliche Vektoraddition:



Die Multiplikation lässt sich geometrisch mit Hilfe von Polarkoordinaten interpretieren:

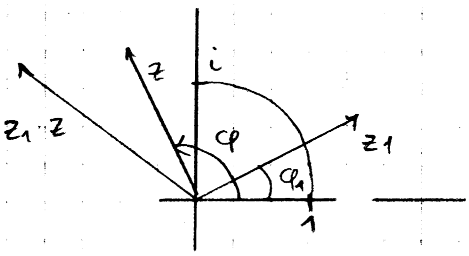
Für $\quad z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \quad , \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

ergibt sich:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$$

aus dem Additionstheorem für sinus und cosinus.

Die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z_1 z$ ist also eine Drehrichtung.



0.3

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$ heißt $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ der **Betrag** von z.

Ein Winkel φ mit $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$ heißt **Argument** von z.

$\varphi = \arg z$

Das Argument ist nicht eindeutig bestimmt, da sich z nicht ändert, wenn wir zu φ ein ganzzahliges Vielfaches von 2π dazuaddieren.

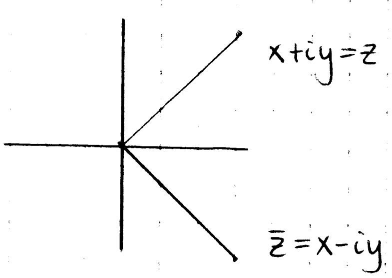
Durch die Formulierung

$\arg z \in]-\pi, \pi]$ können wir $\arg z$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ wohldefinieren.

Bei der Multiplikation multiplizieren sich die Beträge und addieren sich die Argumente.

0.4

Zu $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$ heißt $\bar{z} = x - iy \in \mathbb{C}$ die zu z komplexe Zahl



$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) =: \mathrm{Re}(z)$ heißt **Realteil von z**.

$y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) =: \mathrm{Im}(z)$ heißt **Imaginärteil von z**.

Es gilt $|z|^2 = z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$

Zu $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} =: \mathbb{C}^*$ ist

$$z^{-1} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \qquad \text{das Inverse von } z.$$

$$= \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad : \qquad z^{-1} \cdot z = \frac{z \cdot \bar{z}}{|z|^2} = 1$$

0.5 Satz

Die Menge $\mathbb{C} = \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \}$ zusammen mit $+, \cdot$ ist ein Körper.

BEWEIS

Kommutativ, assoziativ und distributiv Gesetze rechnet man nach.

$\rightarrow$ $1 = 1 + 0 \cdot i$ ist das Einselement

und zu $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ das Inverse.

$\boxtimes$

0.6

Die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^2$ gibt eine Metrik auf $\mathbb{C}$.

Die Norm $\|(x,y)\|$ ist dabei einfach $|z|$.

Wir können also von Konvergenz von Folgen komplexer Zahlen sprechen.

Kapitel 1: Holomorphe Funktionen

1. Potenzreihen

1.1 Motivation

Die meisten häufig verwendeten reellen Funktionen $g: I \to \mathbb{R}$ haben die Eigenschaft, dass die Taylorreihe im Punkt $x_0 \in I$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad , \text{ wobei } \quad a_n := g^{(n)}(x_0)/n!$$

gegen g in einer Umgebung von x_0 konvergiert.

In die Potenzreihen können wir dann auch komplexe Zahlen z für x einsetzen. Viele Eigenschaften von g (zum Bsp die Größe des Konvergenzradius) haben erst in der komplexen Fortsetzung ihre natürliche Erklärung.

1.2 Definition

Eine **Potenzreihe** ist eine Reihe der Form

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

wobei $a_n \in \mathbb{C}$ und der **Entwicklungspunkt** $z_0 \in \mathbb{C}$.

1.3 Satz

Eine Potenzreihe $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ konvergiert entweder

absolut (für jedes z) und **lokal gleichmäßig** (in z)

ODER

es existiert eine reelle Zahl $r \in [0,\infty[$, sodass $P(z)$ auf der Kreisscheibe $D_r(z\;) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-z\;| < r\}$ **absolut** und **lokal gleichmäßig** konvergiert und auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| > r\}$ **divergiert**.

1.4 Bemerkung

1) Im Fall, dass $P(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$ konvergiert, setzen wir $r = \infty$.
   Wir nennen $r \in [0,\infty]$ den **Konvergenzradius** von $P(z)$ und $D_r(z_0)$ den **Konvergenzkreis**.

1.5 Zusatz

Der Konvergenzradius von P genügt der Formel von Cauchy - Hadamard: $\frac{1}{r} = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$

BEWEIS

Wir zeigen zunächst:

a) Abelsches Lemma:

Ist $z_1 \neq z_0$ ein Punkt, so dass die Folge $a_n(z_1-z_0)^n$ beschränkt bleibt, dann konvergiert $P(z)$ absolut und lokal glm auf $D_{r_2}(z_0)$ für jedes r_2 mit $0 < r_2 < |z_1 - z_0| =: r_1$

BEWEIS des Lemmas

Sei $|a_n(z_1-z_0)^n| \leq M \quad \forall n$

Dann gilt für $z \in D_{r_2}(z_0)$:

$$|a_n(z-z_0)^n| = |a_n(z_1-z_0)^n| \left(\frac{|z-z_0|^n}{|z_1-z_0|}\right) \leq M \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n$$

Für $z \in D_{r_2}(z_0)$ ist also die geom. Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} M\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n$ eine konvergente Majorante. ☒

b) Sei r durch die Formel von Cauchy - Hadamard gegeben.

Es gelte: $0 < r \leq \infty$.

Ist dann $0 < r_1 < r$, so folgt aus

$$\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{r} < \frac{1}{r_1}$$

die Ungleichung

$$|a_n| < r_1^{-n} \qquad \text{für fast alle } n$$

Die Folge $(a_n r_1^n)$ ist also beschränkt und $P(z)$ konvergiert auf $D_{r_2}(z_0)$ für jedes $0 < r_2 < r_1 < r$ glm. und absolut.

$0 < r_2 < r_1 < r$ ist beliebig $\Rightarrow$ $P(z)$ auf $D_{r_2}(z_0)$ absolut und lokal glm konvergiert.

c) Sei r wieder durch die Formel C-H gegeben. Wir müssen noch die Divergenz für z mit $|z-z_0| > r$ zeigen.

2016-04-21
(1)

Ist $|z-z_0| > r$, also $|z-z_0|^{-1} < \frac{1}{r} = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$, so gilt:
$|z-z_0|^{-1} < |a_n|$ für unendlich viele n.
Die Folge $a_n(z-z_0)^n$ ist also KEINE Nullfolge und die Reihe divergiert. ☒

1.6 Korollar

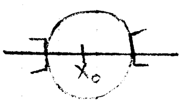
Potenzreihen $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ stellen in ihrem Konvergenzkreis stetige Abbildungen $P: D_r(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ dar.

BEWEIS

Die Konvergenz ist lokal glm. und glm. konvergente Folgen stetiger Funktionen sind stetig. ☒ (Viel mehr ist richtig!)

1.7 Bemerkung

1) Die grundlegende Idee der FUNKTIONENTHEORIE ist, dass man analytische Funktionen $g: I \to \mathbb{R}$ nicht nur auf $I \subset \mathbb{R}$, sondern auf eine Menge $U \subset \mathbb{C}$ offen $f: U \to \mathbb{C}$ auffassen kann $f|_I = g$



2) Der Graph von $f: U \to \mathbb{C}$ ist dann eine Teilmenge von $\mathbb{C}^2$; entzieht sich also unserer Anschauung.
Dennoch ist letzlich f viel übersichtlicher als g.

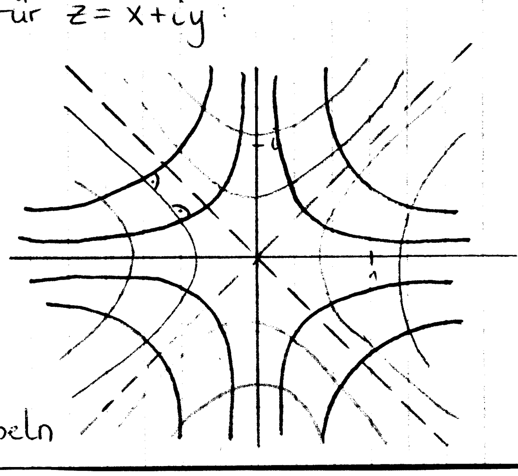
3) Statt des Graphen von f zeichnet man oft die Niveaulinien
$Re(f) = const.$ $Im(f) = const.$

Beispiel: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$. Für $z = x+iy$:

$z^2 = x^2 - y^2 + i(2xy)$

$Re(f(x+iy)) = x^2 - y^2$

$Im(f(x+iy)) = 2xy$



Niveaulinien $Re\, f \mathrel{\hat{=}}$ Hyperbeln

" $Im\, f \mathrel{\hat{=}}$ ebenfalls Hyperbeln

Zusammen bilden sie zwei Familien von zueinander SENKRECHTEN Hyperbeln.

4) Statt diesen Niveaulinien kann man auch den Graphen der Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C} \supset U \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad z \longmapsto |f(z)| \ ,$$

die wir noch mit arg $f(z)$ mit Regenbogenfarben einfärben können.

2. Komplexe Differenzierbarkeit

2.1 Definition

Eine offene wegzusammenhängende Teilmenge $G \subset \mathbb{C}$ nennt man ein **Gebiet**.

In der FUNKTIONENTHEORIE ist es aus Gründen, die später klar werden, üblich, die Definitionsmenge als Gebiet vorauszusetzen.

Allgemein könnte man beliebig offene Mengen zulassen.

Bemerkung:

Eine Teilmenge $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt **wegzusammenhängend**, wenn es zu je zwei Punkten $z_0, z_1 \in G$ einen Weg, d.h. eine stetige Abbildung $\gamma : [a,b] \to G$ gibt, sodass $\gamma(a) = z_0$, $\gamma(b) = z_1$