2016-05-19 (7) Bisher haben wir die Voraussetzung an Γ noch nicht verwendet.

Sei $G_1 = \{ z \in \mathbb{C} \setminus Sp\,\Gamma \mid n(\Gamma, z) = 0 \}$. Unsere Voraussetzung besagt, dass $G \cup G_1 = \mathbb{C}$.

Auf $G \cap G_1$ lässt sich h_0 einfach beschreiben:

$$h_0(z) = \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi =: h_1(z)$$

da

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{\xi - z}\, d\xi = 2\pi i\, f(z)\, n(\Gamma, z) = 0$$

h_1 ist auf ganz G_1 holomorph. Also ist

$$h(z) = \begin{cases} h_0(z) & \text{für } z \in G \\ h_1(z) & \text{für } z \in G_1 \end{cases}$$

eine wohldefinierte ganze Funktion. Für $z \in G_1$ gilt:

$$|h(z)| = |h_1(z)| \leq \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \Gamma)} \max_{\xi \in Sp\,\Gamma} |f(\xi)| \cdot L(\Gamma) \quad , \text{wobei } \Gamma = \sum n_j \gamma_j ,$$

$$L(\Gamma) = \sum n_j L(\gamma_j)$$

Für $z \to \infty$ strebt $h(z) \to 0$. Also ist h eine beschränkte ganze Funktion. Und wegen $h(z) \xrightarrow[z \to \infty]{} 0$ folgt $h(z) \equiv 0$ und wegen dem Satz von Liouville konstant.

Damit ist (2) gezeigt.

Zu (1): Zu $a \in G \setminus Sp\,\Gamma$ betrachten wir die Funktion $F(z) = f(z)(z-a)$

F ist auf G holomorph und nach (2) und $F(a) = 0$

$$0 = n(\Gamma, a) F(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{F(\xi)}{\xi - a}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\xi)\, d\xi$$

$\boxtimes$

2016-05-23 (8) **7.11 Definition**

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und $D \subset \mathbb{C}$ eine Kreisscheibe.

γ **läuft** in D **von Rand zu Rand**, wenn folgendes gilt:

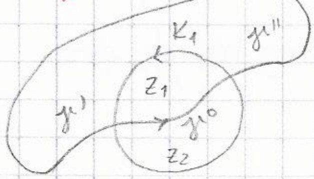
(i) Es gibt $t_1, t_2 \in [a,b]$, $t_1 < t_2$ mit $\gamma(t_1), \gamma(t_2) \in \partial D$, $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$

(ii) Für t mit $t_1 < t < t_2$ gilt $\gamma(t) \in \mathring{D}$

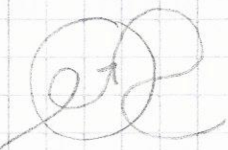
(iii) Für $t \notin [t_1, t_2]$ gilt $\gamma \notin \overline{D}$

(iv) $D \setminus Sp\,\gamma$ hat genau zwei Zusammenhangskomponenten und $D \cap Sp\,\gamma$ liegt auf dem Rand von beiden Komponenten.

Beispiele:



Läuft von Rand zu Rand



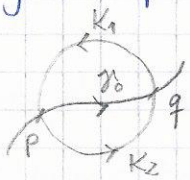
hier nicht der Fall

7.12 Bezeichnungen

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Integrationsweg und $\mathcal{D}$ eine (kleine) Kreisscheibe, in der γ von Rand zu Rand verläuft.

Sei $p = \gamma(t_1)$ und $q = \gamma(t_2)$. Der Teilweg $\gamma|_{[t_1,t_2]} = \gamma_0$

Sei K_1 der Kreisbogen von q nach p auf $\partial\mathcal{D}$ entgegen dem Uhrzeigersinn und K_2 der Kreisbogen von p nach q entgegen dem Uhrzeigersinn.



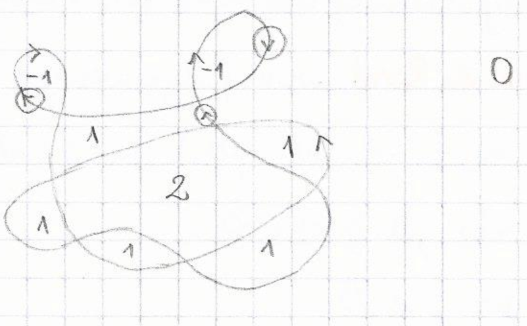
Es seien $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 = \mathcal{D} \setminus \operatorname{Sp}\gamma$ die Zusammenhangskomponenten, so dass $\operatorname{Sp} K_j \subset \partial\mathcal{D}_j$.

Satz

Mit Notation wie oben gilt für $z_1 \in \mathcal{D}_1$ und $z_2 \in \mathcal{D}_2$: $n(\gamma, z_1) = n(\gamma, z_2) + 1$

Beispiel

Sei Γ ein Zyklus. Da $n(\Gamma, z) = 0$ für z in der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp}\Gamma$ gilt, können wir mit dem Satz die Umlaufzahlen leicht sukzessive berechnen.



BEWEIS

Wir zerlegen γ in Teilwege $\gamma = \gamma' \gamma_0 \gamma''$. Weiter setzen wir für beliebige Ketten

2016-05-23 (8) Γ und $z \notin Sp\,\Gamma$: $n(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$ (nicht notwendig in $\mathbb{Z}$)

Dann gilt:

$$n(\gamma, z_1) - n(\gamma, z_2) = n(\gamma_0, z_1) - n(\gamma_0, z_2) + n(\gamma' + \gamma'', z_1) - n(\gamma' + \gamma'', z_2).$$

Da $n(\gamma' - K_1 + \gamma'', z_1) = n(\gamma' - K_1 + \gamma'', z_2)$ gilt (z_1, z_2 liegen in den gleichen Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus Sp(\gamma' - K_1 + \gamma'')$ von der geschlossenen Kette $\gamma' - K_1 + \gamma''$), folgt

$$n(\gamma, z_1) - n(\gamma, z_2) = n(\gamma_0, z_1) - n(\gamma_0, z_2) + n(K_1, z_1) - n(K_1, z_2)$$

Da z_2 in der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C} \setminus Sp(\gamma_0, K_1)$ liegt, gilt

$$n(\gamma_0 + K_1, z_2) = 0$$
$$\shortparallel$$
$$n(\gamma_0, z_2) + n(K_1, z_2)$$

Also $n(\gamma, z_1) - n(\gamma, z_2) = n(\gamma_0, z_1) + n(K_1, z_1)$

$$= n(\gamma_0, z_1) + n(K_1, z_1) + n(K_2 - \gamma_0, z_1)$$ (da z_1 in der beschr. Komponente von $\mathbb{C} \setminus Sp(K_2 + \gamma_0)$)

$$= n(K_1 + K_2, z) = 1$$

□

7.14 Definition

Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ heißt **einfach zusammenhängend**, wenn jeder Zykel in G nullhomolog ist. In einfach zusammenhängenden Gebieten gilt also

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0 \qquad \forall\, \Gamma \text{ Zykel und } f: G \to \mathbb{C} \text{ holomorph}$$

Jede holomorphe Funktion $f: G \to \mathbb{C}$ hat, wenn G einfach zshg ist, in G eine Stammfunktion.

Beispiele sind konvexe Gebiete.

Bemerkung

1) Allgemein könnten wir $Z_1(G) = \{\Gamma \mid \Gamma \text{ Zykel in } G\} \subset F_{\{\text{Integr. Weg}\}} = C_1(G)$ und $B_1(G) = \{\Gamma \in Z_1(G) \mid \Gamma \text{ ist nullhomolog}\}$ betrachten.
Dann ist die Quotientengruppe $H_1(G) = Z_1(G) / B_1(G)$ ein Maß dafür, in wie weit G einfach zusammenhängend ist. Für Gebiete $G \subset \mathbb{C}$ gilt

$$H_1(G) = 0 \iff G \text{ ist einfach zusammenhängend}$$

2) Für beliebige wegzusammenhängende topologische Räume muss die Definition von $B_1(X)$ abgeändert werden und sie ist außerdem in $H_1(G) = 0$ nicht

ausreichend. Die richtige Forderung ist die **Poincaré Fundamentalgruppe**

$$\pi_1(G) = \pi_1(G, x) = 0$$

$$\pi_1(G) / [\pi_1 G, \pi_1 G] \cong H_1(G)$$

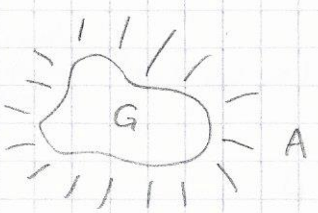
7.15 Satz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann sind äquivalent:

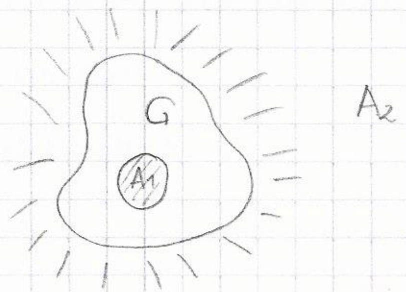
(1) G ist einfach zusammenhängend

(2) Ist $A = A_1 \cup A_2$ eine disjunke Zerlegung von $A = \mathbb{C} \setminus G$ in abgeschlossene Teilmengen, dann ist A_j genau dann kompakt, wenn $A_j = \emptyset$

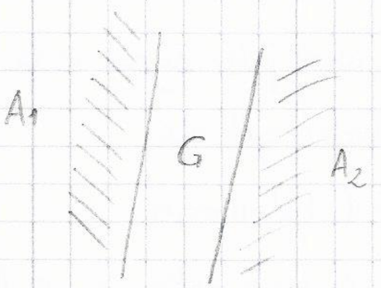
Beispiele



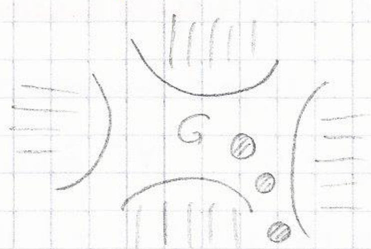
einfach zusammenhängend



nicht einfach zusammenhängend



einfach zusammenhängend



nicht einfach zusammenhängend

Für den Beweis verwenden wir:

7.16 Satz

Seien $A \subset U \subset \mathbb{C}$ Mengen mit A kompakt, U offen.

Dann existiert ein Zyklus Γ in $U \setminus A$, sodass

$$n(\Gamma, z) = 1 \quad \forall z \in A$$

$$n(\Gamma, z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus U$$

BEWEIS (Satz 7.15)

1) $\Rightarrow$ 2)

Angenommen (2) ist nicht erfüllt, etwa $\mathbb{C} \setminus G = A = A_1 \,\dot\cup\, A_2$ mit A_1 kompakt. Nach Satz 7.16 angewendet auf $A_1 \subset U = \mathbb{C} \setminus A_2$ offen existiert ein Zykel in $U \setminus A_1 = G$ mit $n(\Gamma, z) = 1 \quad \forall z \in A_1$, also Γ ist nicht nullhomolog in G.

2) $\Rightarrow$ 1)

Angenommen G ist nicht einfach zusammenhängend, etwa Γ ein Zykel in G, der nicht nullhomolog ist.

Wir setzen $\quad A_1 = \{ z \in \mathbb{C} \setminus G \mid n(\Gamma, z) \neq 0 \}$

$$A_2 = \{ z \in \mathbb{C} \setminus G \mid n(\Gamma, z) = 0 \}$$

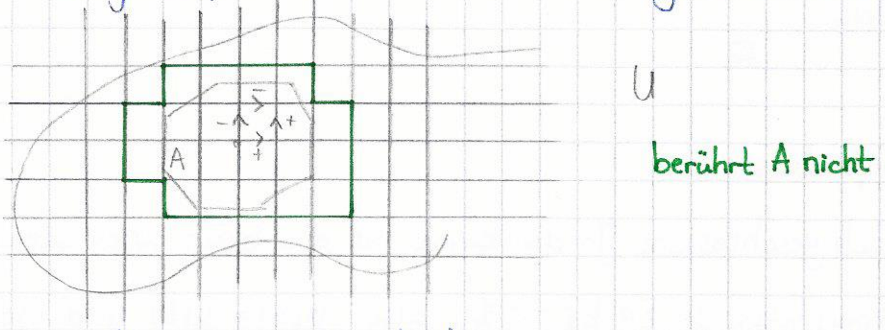
A_1 ist nach Voraussetzung nicht leer und kompakt, A_2 ist abgeschlossen, da $n(\Gamma, z)$ auf $\mathbb{C} \setminus G$ eine lokal konstante Funktion und $\mathbb{C} \setminus G = A_1 \cup A_2$, also (2) ist nicht erfüllt. $\boxtimes$

BEWEIS (Satz 7.16)

a) Wir nehmen zunächst an, dass A wegzusammenhängend ist.

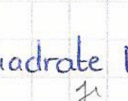
Sei $1 \gg \delta > 0$ eine reelle Zahl mit $2\delta < \overset{>0}{\mathrm{dist}(A, \mathbb{C} \setminus U)} = \mathrm{dist}(A, \partial U)$

Sei $a \in A$. Wir betrachten ein Quadratnetz von Quadraten Q_i mit Kanten der Länge δ parallel zur reellen und imaginären Achse,



so dass a im Inneren eines Q_j liegt.

Da A kompakt ist, wird A nur von endlich vielen Quadraten, etwa $Q_1, \dots, Q_N$, geschnitten. Die Kanten der Quadrate $[p, q]$ orientieren sich so, dass p westlich oder südlich von q liegt.



Die zugehörigen Randzykel $\partial Q_i = \Gamma_i = \alpha_i + \beta_i - \gamma_i - \delta_i$.

Wir setzen $\Gamma = \sum_{j=1}^{N} \Gamma_j$

Der Punkt a gehört zu einem der Q_j und es gilt:

$$n(\Gamma, a) = \sum_{k=}^{N} n(\Gamma_k, a) = n(\Gamma_j, a) = 1$$

In Γ heben sich Kanten $[p, q]$, die zweimal auftreten, wegen den umgekehrten Vorzeichen weg. Übrig bleiben ausschließlich Kanten, die A nicht treffen. Wegen $\delta < \operatorname{dist}(A, \mathbb{C} \setminus U) = \operatorname{dist}(A, \partial U)$ ist Γ also ein Zykel in $U \setminus A$.

Es gilt: $\quad n(\Gamma, z) = \sum_{j=1}^{N} n(\Gamma_j, z) = 0 \quad$ für $z \in \mathbb{C} \setminus U$, da $z \notin Q_j \ \forall j$

und $\quad n(\Gamma, z) = n(\Gamma, a) = 1 \quad \forall z \in A$, da $n(\Gamma, z)$ konstant auf $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp} \Gamma$ und A zusammenhängend.

b) Hat $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ endlich viele Wegzusammenhangskomponenten, so wählen wir δ so klein, dass außerdem $2\delta \leq \operatorname{dist}(A_i, A_j) \ \forall i \neq j$ gilt.
Die Konstruktion in a) liefert dann einen Zykel, der aus n Komponenten besteht.

c) Sei A eine beliebige kompakte Teilmenge. Zu jedem Punkt $z \in A$ betrachten wir einen Quader $Q(z)$ mit $\quad z \in \mathring{Q}(z) \subset \overline{Q(z)} \subset U$.
Dann ist $\bigcup_{z \in A} \mathring{Q}(z)$ eine offene Überdeckung, endlich viele überdecken schon und wir können A durch $A_0 = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{Q(z_j)}$ ersetzen und b) anwenden.

$\boxtimes$

7.18 Definition

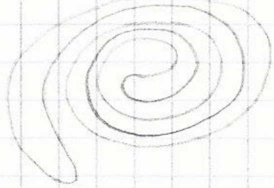
Eine einfach geschlossene Jordankurve ist die Spur eines stetig einfach geschlossenen Wegs $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, also $\gamma(a) = \gamma(b)$ und $\gamma|_{[a,b[}$ ist injektiv.

7.19 Jordanscher Kurvensatz

Jede einfach geschlossene Jordankurve zerlegt die Ebenen in ein beschränktes und unbeschränktes Gebiet. <u>Beweis:</u> Fulton - Introduction to Algebric - Topology $\boxtimes$

2016-05-23
(8)

klar



nicht so klar

Spezialfall:

7.20 Satz (Jordanscher Kurvensatz für Integrationswege)

Es sei γ ein einfach geschlossener Integrationsweg, der in jedem Punkt $z_0 \in Sp\gamma$ die Ebene zerlegt (d.h. zu jedem Punkt $z_0 \in Sp\gamma$ existiert eine kleine Kreisscheibe um z_0, in der γ von Rand zu Rand verläuft). Dann zerlegt $Sp\gamma$ die Ebene in zwei Gebiete.

BEWEIS

Graph von $x \sin\frac{1}{x}$ sei Teil von γ?

Sei $U = \mathbb{C} \setminus Sp\gamma$.

(1) U hat wenigstens zwei Zusammenhangskomponenten, denn für $z_0 \in Sp\gamma$ und $\mathcal{D}$ ein Kreis, so dass γ von Rand zu Rand läuft, gilt

$$n(\Gamma, z_1) = n(\Gamma, z_2) + 1 \qquad \text{für } z_1, z_2 \in \mathcal{D} \setminus Sp\Gamma \text{ geeignet.}$$

(2) $U = \mathbb{C} \setminus Sp\Gamma$ hat höchstens zwei Komponenten. Sei $G \subset U$ eine Zusammenhangskomponente. Dann gilt $\partial G \subset Sp\gamma$.

/A: $\partial G \neq Sp\gamma$ und $z_0 \in \partial(\partial G) \subset Sp\gamma$. Da γ $\mathbb{C}$ in z_0 lokal in zwei Teile zerlegt, folgt $\partial(\partial G) = \emptyset$

$\boxtimes$