2016-06-23

13. Partialbruchzerlegung

13.1

Sei f eine meromorphe Funktion und a eine Polstelle von f. Der Hauptteil von f in a hat die Gestalt $f_a(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a}$

Wenn n die Polstellenordnung ist, ist also ein Polynom in $\frac{1}{z-a}$ ohne konstanten Term.

13.2 Definition

Sei G ein Gebiet. Eine **Hauptteilverteilung** besteht aus einer Menge $H = \{h_a \mid a \in P\}$, wobei h_a ein Hauptteil mit Entwicklungspunkt a ist, und $P \subset G$ eine diskrete Teilmenge (ohne Häufungspunkt).

Beispiel:

$f: G \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine meromorphe Funktion und P die Menge der Polstellen, für $a \in P$, h_a^f, $H = \{h_a^f \mid a \in P\}$.

13.3 Partialbruchzerlegung von rationalen Funktionen

Sei $R(z)$ eine rationale Funktion, $a_1, \ldots, a_r$ die Polstellen von R und $h_1, \ldots, h_r$ die zugehörigen Hauptteile. Die Differenz

$$P(z) = R(z) - (h_1(z) + \ldots + h_r(z))$$

ist dann eine rationale Funktion ohne Pole, also ein Polynom.

$R(z) = h_1(z) + \ldots + h_r(z) + P(z)$ heißt **Partialbruchzerlegung** von R.

13.4

Sei f eine beliebige meromorphe Funktion auf G mit nur abzählbar vielen Polstellen $P = P(f) \subset G$: $H(f) = \{h_{a,f} \mid a \in P(f)\}$,

wobei $h_{a,f}$ der Hauptteil von f in Punkt a ist.

Ist H eine vorgegebene Hauptteilverteilung auf G, so nennen wir eine meromorphe Funktion f auf G mit $H(f) = H$ eine **Lösung** der Hauptteilverteilung.

13.5 Satz

Sind f und g meromorphe Funktionen auf $G \subset \mathbb{C}$ und gilt $H(f) = H(g)$, dann ist $f \cdot g$ eine holomorphe Funktion auf G.
Mit anderen Worten: Die Lösung einer Hauptteilverteilung ist eindeutig bis auf eine holomorphe Funktion.

<u>BEWEIS</u>

In $f - g$ heben sich die Hauptteile weg. ☒

<u>Wir fragen:</u> Gibt es zu jeder Hauptteilverteilung H eine Lösung?

13.6 Satz (Mittag-Leffler) Blatt 10, Aufg. 2

Für $G = \mathbb{C}$ ist jede Hauptteilverteilung lösbar, hat also eine Lösung.

13.7 Bemerkung

Der Satz gilt für beliebige Gebiete $G \subset \mathbb{C}$, ist aber viel schwieriger zu beweisen.

<u>BEWEIS</u>

Die vorgegebenen Polstellen $a_n \in P$ seien so durchnummeriert, dass

$$|a_0| = 0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \ldots \leq |a_n|$$

Dann gilt $\lim\limits_{n \to \infty} |a_n| = \infty$.
Ist h_n der vorgegebene Hauptteil zum Punkt a_n, so können wir nicht erwarten, dass die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n$ konvergiert.

Die Idee besteht nun darin Konvergenzverbessernde Summanden zu betrachten:
Dazu wählen wir eine Folge (ε_n) mit $\varepsilon_n \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$
Zu jedem h_n wähle ein Polynom $P_n(z)$, so dass

$$|h_n(z) - P_n(z)| < \varepsilon_n \qquad \forall z \text{ mit } |z| = \frac{|a_n|}{2} \text{ gilt.}$$

Zum Beispiel können wir für $P_n(z)$ das Taylorpolynom von $h_n(z)$ im Nullpunkt von genügend großem Grad wählen.
Die Taylorreihe von h_n konvergiert in $\{z \mid |z| < |a_n|\}$ kompakt.
Wir setzen dann $\quad f = h_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (h_n - P_n)$

2016-06-23 **13.8 Definition**

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ von meromorphen Funktionen auf einem Gebiet G konvergiert kompakt auf G, wenn es zu jedem Kompaktum $K \subset G$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass alle f_n für $n \geq n_0$ keine Polstelle in K haben, und die Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n$ auf K gleichmäßig konvergiert.

Der Grenzwert einer kompakt konvergenten Reihe meromorpher Funktionen

$$f = \underbrace{\sum_{n=0}^{n_0-1} f_n}_{\text{meromorph}} + \underbrace{\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n}_{\text{holomorph in } K} \qquad \text{ist meromorph}$$

<u>BEWEIS:</u> (Fortsetzung)

Also $f = \sum_{n=1}^{\infty} (h_n - P_n)$ konvergiert kompakt auf $\mathbb{C}$:

Zu jedem $r > 0$ existiert nämlich ein n_0, so dass $|a_n| > 2r$ für $n \geq n_0$.

Wegen $\sum_{n=n_0}^{\infty} |h_n(z) - P_n(z)| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \varepsilon_n < \infty \qquad \forall z \in \mathcal{D}_r(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$

Die Grenzfunktion hat die gewünschten Hauptteile, da $\sum_{n=n_0}^{\infty} (h_n(z) - P_n(h))$ holomorph auf $\mathcal{D}_r(0)$ ist und $\sum_{n=1}^{n_0-1} (h_n(z) - P_n(z))$ die Hauptteile $h_1, \dots, h_{n_0-1}$ hat.

Also $f = h_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (h_n - P_n)$ ist die gesuchte meromorphe Funktion mit

$H(f) = H = \{ h_{a_k} \mid a_k \in P \}$.

$\boxtimes$

13.9 Zusatz

Als „Konvergenzverbessernde Summanden" kann man Taylorpolynome der h_n mit Entwicklungspunkt 0 genügend großen Grades wählen.

13.10 Beispiel

Sei a_n eine Folge komplexer Zahlen mit $|a_n| \leq |a_{n+1}|$ $(a_0 = 0)$ ohne Häufungspunkte in $\mathbb{C}$.

Wir suchen eine meromorphe Funktion mit einfachen Polen zu genau diesen Punkten und Residuen c_n, $n = 0, 1, 2, \dots$

Also Hauptteiler $h_n = \frac{c_n}{z - a_n}$

Die Taylorreihe von $\frac{1}{z - a_n}$ im Nullpunkt ist $\frac{1}{z - a_n} = -\frac{1}{a_n} \underbrace{\sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{\mu}}_{\frac{1}{1 - \frac{z}{a_n}}}$

Ist $\sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon_r < \infty$ vorgegeben, dann existiert ein k_n

$$\left| \frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n} \sum_{\mu=0}^{k_n} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{\mu} \right| \leq \frac{\varepsilon_n}{|c_n|} \qquad \text{für } z \text{ mit } |z| \leq \frac{1}{2}|a_n|.$$

Die gesuchte Funktion ist dann

$$f(z) = \frac{c_0}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \left(\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n} \cdot \sum_{\mu=0}^{k_n} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{\mu} \right)$$

13.11 Satz

Sei f eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ mit Polstellen $a_0 = 0$ (eventuell) und a_n mit $|a_n| \leq |a_{n+1}| \leq \dots$ und Hauptteilen h_n.

Dann existieren k_n, sodass für P_n das k_n-te Polynom (Taylorpolynom) in 0 die Reihe $g = h_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (h_n - P_n)$ kompakt konvergiert.

Die Differenz $f-g$ ist dann eine ganze Funktion (= holomorphe Funktion) auf $\mathbb{C}$.

$\boxtimes$

13.12 Beispiel

Wir betrachten $f(z) = \pi \cdot \cot(\pi z) = \pi \cdot \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$

f hat Pole im Punkt $a_n = n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ mit einfachen Residuen.

$$f(z) = f_0(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}}{}' \left(\frac{1}{(z-n)} - P_n(z) \right)$$

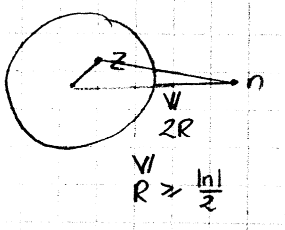
wobei Σ' andeutet, dass wir über $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ summieren

Die Reihe $\Sigma' \frac{1}{z-n}$ konvergiert nicht, aber $\Sigma' \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) = z \cdot \Sigma' \frac{1}{n(z-n)}$ konvergiert lokal gleichmäßig.

Ist $|z| \leq R$ und $|n| \geq 2R$, so ist $|z-n| \geq \frac{|n|}{2}$

und daher $\quad \frac{|z|}{|n||(z-n)|} \leq \frac{2R}{n^2}$

und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.



13.13 Satz (Euler; Partialbruchentwicklung von cotangens)

$$\pi \cdot \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_n{}' \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$$

(wobei $\sum_n{}'$ die Summation über $\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ bezeichnet)

2016-06-23 BEWEIS

Nach dem Vorangegangenem wissen wir lediglich, dass

$\pi \cdot \cot(\pi z) - g(z) = f_0(z)$ eine ganze Funktion f_0 ist

$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} \cdot \Sigma' \left(\frac{1}{z-n}, \frac{1}{n} \right) + f_0(z)$

Um f_0 zu bestimmen, leiten wir ab.

$-\left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2 = f_0'(z) - \frac{1}{z^2} - \Sigma' \frac{1}{(z-n)^2}$

Wir betrachten die Reihe $f_1(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$

$f_1(z)$ ist periodisch mit Periode 1, $h_1(z+1) = f_1(z)$, und hat Pole $z \in \mathbb{Z}$ zweiter Ordnung.