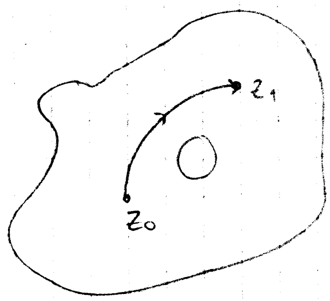
2016-04-21

2. Komplexe Differenzierbarkeit

2.1 Definition

Eine offene wegzusammenhängende Teilmenge $G \subset \mathbb{C}$ nennt man ein **Gebiet**.
In der FUNKTIONENTHEORIE ist es aus Gründen, die später klar werden, üblich, die Definitionsmenge als Gebiet vorauszusetzen.
Allgemein könnte man beliebig offene Mengen zulassen.

Bemerkung:
Eine Teilmenge $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt **wegzusammenhängend**, wenn es zu je zwei Punkten $z_0, z_1 \in G$ einen Weg, d.h. eine stetige Abbildung $\gamma: [a,b] \to G$ gibt, sodass $\gamma(a) = z_0$, $\gamma(b) = z_1$



2016-04-25 (2)

2.2 Definition

Sei $f: G \to \mathbb{C}$ eine Abbildung mit G Gebiet. f heißt in $z_0 \in G$ **komplex diff'bar**, wenn es eine stetige Funktion $\Delta: \mathbb{C} \to G$ gibt mit

$$f(z) = f(z_0) + \Delta(z)(z - z_0)$$

und

$$\Delta(z_0) =: f'(z_0)$$

heißt dann **(komplexe) Ableitung** von f in z_0. Ist f in jedem Punkt $z_0 \in G$ diff'bar, dann ist $f': z \mapsto f'(z)$ erneut eine Funktion. Ist diese wieder komplex diff'bar, dann bezeichnet $f'' = (f')'$ die zweite Ableitung.

2.3 Definition

beliebig oft diffbar

Eine Funktion $f: G \to \mathbb{C}$ auf einem Gebiet heißt **holomorph**, wenn f in jedem Punkt $z_0 \in G$ komplex diff'bar ist.

2.4 Beispiele

1) Konstante Funktionen sind holomorph. Für $f: \mathbb{C} \to G$, $f(z) = c$ gilt:
$c = c + 0(z - z_0)$, also $f' = 0$.

2) Die Zerlegung $z = z_0 + 1(z - z_0)$ zeigt, dass die identische Abbildung $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z$ komplex diff'bar ist mit $f'(z) = 1$.

3) Die Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$ ist nirgends komplex diff'bar. Ist nämlich $z_0 = x_0 + iy_0$, so folgt für Punkte $z = x + iy_0$
$\bar{z} = x - iy_0 = x_0 - iy_0 + \Delta(z)(x - x_0)$ und es folgt $\Delta(z) = 1$
für $\underset{(x \neq x_0)}{z \neq z_0}$ also $\Delta(z_0) = 1$ wegen der Stetigkeit.
Andererseits für $z = x_0 + iy$ $\quad x_0 - iy = x_0 - iy_0 + \Delta(z)\, i(y - y_0)$
$\Delta(z) = -1$ für $\underset{(y \neq y_0)}{z \neq z_0}$. Also $\Delta(z_0) = -1 \neq 1$ ↯ □

Analog zu den Regeln für Funktionen $g: I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall, hat man:

2.5 Satz

Ist $f: G \to \mathbb{C}$ in z_0 komplex diffbar, dann ist f stetig in z_0.

2.6 Satz

Es seien $f, g: G \to \mathbb{C}$ in $z_0 \in G$ komplex diffbare Funktionen.
Dann sind auch die Funktionen $f + g$ und $f \cdot g: G \to \mathbb{C}$ in z_0 komplex diffbar und

1) $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$
2) $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)\, g(z_0) + f(z_0)\, g'(z_0)$
(Leibnizregel)

2.7 Satz

Ist $f: G \to \mathbb{C}$ in $z_0 \in G$ komplex diff'bar und $f(z_0) \neq 0$.
Dann ist die Funktion $\frac{1}{f}$ in einer Umgebung von z_0 definiert und komplex diffbar mit
$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = \frac{-f'(z_0)}{(f(z_0))^2}$$

2016-04-25
(2)

2.8 Satz (Kettenregel)

Es seien $U, V \subset \mathbb{C}$ Gebiete, $f: U \to V$, $g: V \to \mathbb{C}$. Ist f in z_0 und g in $f(z_0) = w_0$ komplex diffbar, dann ist $g \circ f: U \to \mathbb{C}$ in z_0 komplex diffbar und

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$$

2.9 Bemerkung

1) Diese Regeln beweist man analog wie im Fall von reellen Funktionen.
2) Abgesehen von dieser oberflächlichen Analogie ist komplexe Diffbarkeit eine wesentlich tiefere Eigenschaft als reelle Diffbarkeit.
3) Jede Funktion $f: G \to \mathbb{C}$ lässt sich in der Form $f = g + ih$ mit $g, h: G \to \mathbb{R}$ darstellen. g bzw h heißen **Realteil** bzw. **Imaginärteil** von f.
   Wir wollen die komplexe Differenzierbarkeit von f mit der reellen Diffbarkeit von g und h vergleichen.

2.10 Zur Erinnerung:

$g: G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, ist in $z_0 = x_0 + iy_0$ diffbar, wenn g sich in z_0 gut durch eine $\mathbb{R}$-lineare Funktion approximieren lässt, d.h.

$\exists\, \Delta_1, \Delta_2: G \to \mathbb{R}$: $\quad g(z) = g(z_0) + \Delta_1(z)(x - x_0) + \Delta_2(z)(y - y_0)$

mit Δ_1, Δ_2 in z_0 stetige Funktionen.

Die Werte $\Delta_1(z_0) = \frac{\partial g}{\partial x}(z_0)$, $\Delta_2(z_0) = \frac{\partial g}{\partial y}(z_0)$ heißen **partielle Ableitungswerte**.

Also:

2.11 Definition

Eine Funktion $f = g + ih: G \to \mathbb{C}$ heißt in $z_0 = x_0 + iy_0$ **reell diff'bar**, wenn es in z_0 stetige Funktionen $\Delta_1, \Delta_2: G \to \mathbb{C}$ gibt mit

$$(*) \quad f(z) = f(z_0) + \Delta_1(z)(x - x_0) + \Delta_2(z)(y - y_0)$$

Dabei ist

$$\Delta_1(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial g}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial h}{\partial x}(z_0)$$
$$\Delta_2(z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \frac{\partial g}{\partial y}(z_0) + i\frac{\partial h}{\partial y}(z_0)$$

Relle Diffbarkeit ist äquivalent dazu, dass der Realteil und der Imaginärteil diffbar sind.

In der FUNKTIONENTHEORIE ist es nützlich, reelle Diffbarkeit anders auszudrücken.

2.12 Satz

Sei $f = g + ih : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion, $z_0 \in G$. Äquivalent sind:

1) f ist in z_0 reell diffbar
2) Es gibt in z_0 stetige Funktionen $A_1, A_2 : G \to \mathbb{C}$, sodass
$$f(z) = f(z_0) + A_1(z)(z - z_0) + A_2(z)(\bar{z} - \bar{z}_0)$$

<u>BEWEIS</u>

$$z - z_0 = x - x_0 + i(y - y_0)$$
$$\bar{z} - \bar{z}_0 = x - x_0 - i(y - y_0)$$

Also erfüllt f die Bedingung 2). Dann erfüllt mit
$$\Delta_1 = A_1 + A_2, \quad \Delta_2 = i(A_1 - A_2)$$
die Bedingung 1). Umgekehrt:
$$A_1 = \frac{\Delta_1 - i\Delta_2}{2}, \quad A_2 = \frac{\Delta_1 + i\Delta_2}{2}$$
Δ_1, Δ_2 sind in z_0 stetig genau dann, wenn A_1, A_2 in z_0 stetig sind. $\boxtimes$

2.13 Definition

Die Werte $A_1(z) =: \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$, $A_2(z) =: \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)$ heißen **Wirtinger-Ableitungen** von f in z_0.

Es gilt also
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

bzw. umgekehrt
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = i\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)$$

2.14 Satz

Sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion auf einem Gebiet und $z_0 \in G$.

Äquivalent sind:

2016-04-25 (2)

1) f ist in z_0 komplex diffbar

2) f ist in z_0 reell diffbar und $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$

BEWEIS

1) ⇒ 2)

f komplex diffbar in z_0 $\Rightarrow \exists\, \Delta: G \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = f(z_0) + \Delta(z)(z - z_0)$ mit Δ in z_0 stetig.

Wir können also $A_1(z) = \Delta(z)$ und $A_2(z) = 0$ und setzen $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$.

Umgekehrt: $f(x) = f(z_0) + A_1(z)(z - z_0) + A_2(z)(\bar{z} - \bar{z}_0)$

mit A_1, A_2 stetig in z_0 und $A_2(z_0) = 0$, dann betrachten wir

$$\hat{\Delta}(z) =: \begin{cases} A_2(z) \cdot \dfrac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0}, & \text{für } z \neq z_0 \\ 0, & \text{für } z = z_0 \end{cases}$$

$\hat{\Delta}$ ist in z_0 stetig, da $\left|\frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0}\right| = 1$ und $A_2(z)$ stetig in z_0 mit $A_2(z_0) = 0$.

Wir setzen $\Delta(z) = A_1(z) + \hat{\Delta}(z)$ und erhalten $f(z) = f(z_0) + \Delta(z)(z - z_0)$.

Also ist f komplex diffbar. $\boxtimes$

2.15 Zusatz

Ist f in z_0 komplex diffbar, so gilt:

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) - i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right)$$

2.16 Korollar

Eine holomorphe Funktion $f = g + i \cdot h \quad G \to \mathbb{C}$ ist in G reell diffbar und genügt dem partiellen Differentialgleichungssystem.

$$(*) \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{-\partial h}{\partial x}$$

BEWEIS

Es gilt: $0 = 2\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\right)$ $\boxtimes$

Man nennt $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y}$, $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x}$ das partielle Differentialgleichungssystem die **Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung**.

Eine Funktion f auf G ist holomorph

$\Leftrightarrow$ f ist reell diffbar und Real- und Imaginärteil erfüllen die CR-D

$$\frac{\partial^2}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y} = \left(2\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$$

Bemerkung:

Da $f(z) = z$ holomorph ist, sind Polynome $\sum_{n=0}^{d} a_n (z-z_0)^n$ holomorph.

2.17 Korollar

Sei $f: G \to \mathbb{C}$ in z_0 komplex diffbar und $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \neq 0$. (1)

Dann erhält die lineare Approximation $z \mapsto f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0)$,

$z \mapsto f'(z_0) \cdot z$ Winkel.

Holomorphe Funktionen $f: G \to \mathbb{C}$ erhalten Winkel in allen Punkten $z_0 \in G$ (2)

mit $f'(z_0) \neq 0$

BEWEIS

Die Abbildung $z \mapsto f'(z_0) \cdot z$, also Multiplikation mit $f'(z_0)$ ist eine Drehung. ☒

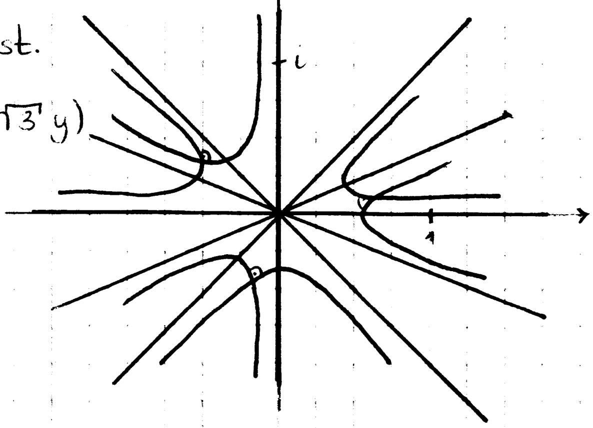
Beispiel

$f(z) = z^3 = (x+iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$

Niveaulinien:

$x^3 - 3xy^2 = \text{const.}$

$x(x-\sqrt{3}y)(x+\sqrt{3}y)$



$Re(f) = 0$

$Im(f) = 0$

2016-04-25
(2)

3. Wegintegrale

3.1 Definition

Ein **Integrationsweg** in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist eine stetige stückweise stetig diffbare Abbildung $\gamma : [a,b] \to G$.

γ heißt **glatt**, wenn γ überall diffbar und $\gamma'(t) \neq 0 \ \forall t \in [a,b]$

γ heißt **geschlossen**, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$, Anfangspunkt und Endpunkt übereinstimmen.

$\gamma([a,b]) \subset G$ heißt **Spur von γ** und $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt$ die **Bogenlänge von γ**.

3.2

In der ANALYSIS III Vorlesung zeigt man, dass Kraftfelder auf $\mathbb{R}^2$ am besten durch Differentialform dargestellt werden und die Arbeit erklärt wird durch

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b \left(g(\gamma(t)) \, \gamma_1'(t) + h(\gamma(t)) \, \gamma_2'(t) \right) dt$$

erklärt wird, wobei $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ ein Weg ist.