17.3 Satz

$E_{\tau_1} \cong E_{\tau_2}$ genau dann, wenn es eine Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ gibt, sodass $\tau_1 = \frac{a\tau_2 + b}{c\tau_2 + d}$.

Beweis: Nach Satz 17.1 gilt:

$$E_{\tau_1} = E_{\tau_2}$$

genau dann, wenn ein $\lambda \in \mathbb{C}^*$ existiert, sodass $\lambda(\mathbb{Z} + \tau_1 \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} + \tau_2 \mathbb{Z}$

Also $\exists a, b, c, d$ sd.

$$\lambda \tau_1 = a\tau_2 + b$$
$$\lambda 1 = c\tau_2 + d,$$

wobei $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2\times 2, \mathbb{Z})$ einen Automorphismus des Gitters

$$\tau_2 \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^2$$

definiert, da $\lambda\tau_1$ und $\lambda \cdot 1$ ebenfalls Erzeuger des Gitters sind.

Also $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \pm 1$ und

$$\tau_1 = \frac{\lambda\tau_2}{\tau_1} = \frac{a\tau_2 + b}{c\tau_2 + d}$$

Es gilt, $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1$, da τ_1 und $\tau_2 \in \mathbb{H}$.

17.4 Satz

$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \cong SL(2, \mathbb{R})$, wobei $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ durch

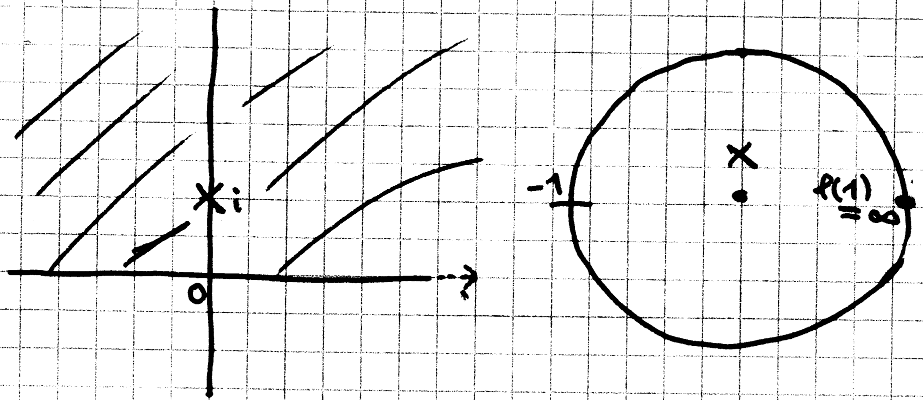
$$\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}, \tau \longmapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

operiert.

Beweis: $\mathbb{H} \cong E$ Einheitskreis vermöge $\tau \mapsto \frac{\tau-i}{\tau+i} = z$

Umkehrabbildung

$$z=\frac{\tau-i}{\tau+i} \Leftrightarrow z(\tau+i)=\tau-i$$
$$\Leftrightarrow \tau(z-1) = -i(z+1)$$
$$\Leftrightarrow \tau = -i\,\frac{z+1}{z-1}$$



Dabei wird $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ $(\subset\hat{\mathbb{C}})$ auf ∂E abgebildet.

Da $\mathrm{Aut}(E) = \left\{z \mapsto e^{i\lambda}\frac{z-z_0}{\bar z_0 z-1} \;\middle|\; z_0\in \mathring{E},\ \lambda\in[0,2\pi]\right\}$

$f^{-1}\,\mathrm{Aut}\, f = \left\{\tau\mapsto \frac{a\tau+b}{c\tau+d} \;\middle|\; \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{R})\right\}$

Rechnung:
$$-i\,\frac{e^{i\lambda}\dfrac{\frac{\tau-i}{\tau+i}-z_0}{\bar z_0\frac{\tau-i}{\tau+i}-1}+1}{e^{i\lambda}\dfrac{\frac{\tau-i}{\tau+i}-z_0}{\bar z_0\frac{\tau-i}{\tau+i}+1}-1}$$

$$= -i\,\frac{e^{i\lambda}\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}-z_0\right)+\bar z_0\frac{\tau-i}{\tau+i}-1}{e^{i\lambda}\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}-z_0\right)-\bar z_0\frac{\tau-i}{\tau+i}-1}\cdot\frac{\bar z_0\frac{\tau-i}{\tau+i}+1}{\bar z_0\frac{\tau-i}{\tau+i}-1}$$

$$= -i\,\frac{e^{i\lambda}(\tau-i)-z_0(\tau+i)+\bar z_0(\tau-i)-(\tau+i)}{e^{i\lambda}(\tau-i)-z_0(\tau+i)-\bar z_0(\tau+i)-\tau+i}$$

$$\cdot\;\frac{z_0(\tau-i)+\tau+i}{\bar z_0(\tau-i)}$$

! !

2. Rechnung: $\underbrace{\begin{pmatrix}-i & -i\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{i\lambda} & -e^{i\lambda}z_0\\ \bar z_0 & -1\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}-ie^{i\lambda}-i\bar z_0 & ie^{i\lambda}z_0+i\\ e^{i\lambda}-\bar z_0 & -e^{i\lambda}z_0+1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & +i\end{pmatrix} = \ldots$

Besser für Aut und $z\mapsto \frac{z-z_0}{\bar z_0 z-1}$ getrennt

17.5 Satz

$SL(2,\mathbb{Z})$ wird erzeugt von

$$T=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

Beweis: $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

$AS=\begin{pmatrix}-b&a\\-d&c\end{pmatrix}$ Multiplikation von rechts mit S vertauscht Spalten

$AT=\begin{pmatrix}a&a+b\\c&c+d\end{pmatrix}$ addiert die erste Spalte zur zweiten

$T^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$ subtrahiert die erste von der zweiten Spalte

$\Rightarrow$ Mit Mult. von S und T^n, $n\in\mathbb{Z}$ erlaubt den Euklidischen Algorithmus in der ersten Zeile durchzuführen:

$$A\cdot(\text{Produkt von } S\text{'s und } T\text{'s})=\begin{pmatrix}1&0\\ *&1\end{pmatrix}=B$$

$\uparrow$ $\det=1$

$$\left(S^2=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right)$$

$$T^{*}B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A$ Produkt von S's und T's

Wollen wir einen Parameterraum für elliptische Kurven bis auf Isomorphie bilden, so können wir den Quotienten

$SL(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$

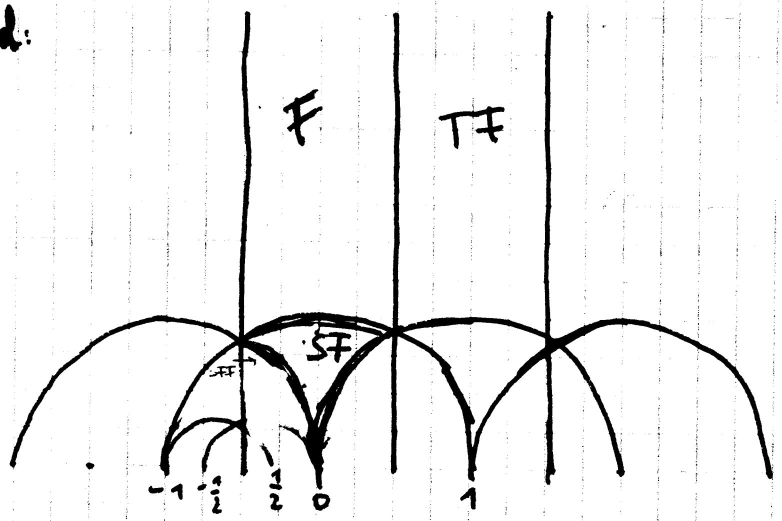
betrachten.

17.6 Satz

Die Menge $\mathcal{F}=\{\tau\in\mathbb{H} \mid -\frac{1}{2} \le \operatorname{Re}\tau \le \frac{1}{2},\ |\tau|\ge 1\}$
bildet einen abgeschl. Fundamentalbereich der Operation
von $SL(2,\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$,

d.h. $\dot{\bigcup}_{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in SL(2,\mathbb{Z})/\pm 1} \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}(\mathcal{F}) \subset \mathbb{H}$, $\bigcup \begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\, \mathcal{F} = \mathbb{H}$

Bild:



Beweis: T erlaubt es sich im Bereich

$-\frac{1}{2} \le \operatorname{Re}(\tau) \le \frac{1}{2}$,

S im Bereich

$|\tau| \ge 1$

zu bewegen

Zusammen folgt die Behauptung.

$\square$

$X(1) = SL(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ ist ein Modulraum für elliptische Kurven
$\cong \mathbb{C}$ als Riemannsche Fläche

$\Gamma = SL(2,\mathbb{Z}),\ N\in\mathbb{N}$

$\Gamma(N) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod N\}$

$\cup$

$\Gamma_1(N) = \{(\quad) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod N\}$

$\cup$

$\Gamma_0(N) = \{\quad \in \Gamma \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \bmod N\}$

$X(N) = \Gamma(N) \backslash \mathbb{H}$, $X_1(N) = \Gamma_1(N) \backslash \mathbb{H}$, $X_0(N) = \Gamma_0(N) \backslash \mathbb{H}$

$X(N)$ beschreibt Elliptische Kurve + Basis der N-Torsionspunkten
$X_1(N)$ " + Punkte der Ordnung N
$X_0(N)$ " + Untergruppe der Ordnung N

$X(N) \longrightarrow X_1(N) \longrightarrow X_0(N) \longrightarrow X(1)$

17.7 Definition (Harmonische Funktion)

$U \subset \mathbb{C}$ offen, $f: U \to \mathbb{C}$ heißt harmonische Funktion, wenn $\Delta f = 0$, $\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2$, $\Delta = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$