Die gesuchte Funktion ist dann

$$f(z) = \frac{c_0}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \left(\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{\mu}\right)$$

$\square$

13.11 Satz

Sei f eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$
mit Polstellen $a_0 = 0$ (eventuell) und a_n mit $|a_n| \leq |a_{n+1}|$
und Hauptteilen h_n.
Dann existieren k_n sodass, P_n das k_n-te Taylorpolynom in 0,
die Reihe $g = h_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (h_n - P_n)$ kompakt konvergiert.
Die Differenz $f - g$ ist dann eine ganze Funktion
(= holomorphe Fn auf $\mathbb{C}$)

Ich weiß: klar?

$\square$

13.12 Beispiele

Wir betrachten

$$f(z) = \pi \cdot \cot(\pi z) = \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$$

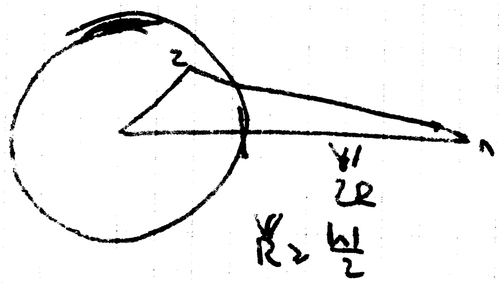
f hat Pole in Punkt $a_n = n$, $n \in \mathbb{Z}$
mit einfachen Residuen.

$$f(z) = f_0(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z}}' \left(\frac{1}{(z-n)} - P_n(z)\right),$$

wobei $\sum'$ andeutet, dass wir über $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ summieren

Die Reihe $\sum' \frac{1}{z-n}$ konvergiert nicht,
aber $\sum' \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) = z \cdot \sum' \frac{1}{n(z-n)}$ konvergiert lokal gleichmäßig.

Ist $|z| \le R$ und $|n| \ge 2R$, so ist $|z-n| \ge \frac{|n|}{2}$
und daher $\frac{|z|}{|n||z-n|} \le \frac{2R}{n^2}$ und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$
konvergiert.



13.13 Satz (Euler, Partialbruchentwicklung von Cotangens)

$$\pi \cdot \cot(\pi z) = \overbrace{\frac{1}{z} + \sum_{n}{}' \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)}^{g(z)}$$

(wobei $\sum_n{}'$ die Summation über $\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ bezeichnet.)

Beweis: Nach dem Vorangegangenen wissen wir lediglich

$$\pi (\cot \pi z) - g(z) = f_0(z) \text{ mit } f_0 \text{ ganze Fkt.}$$

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum{}' \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) + f_0(z)$$

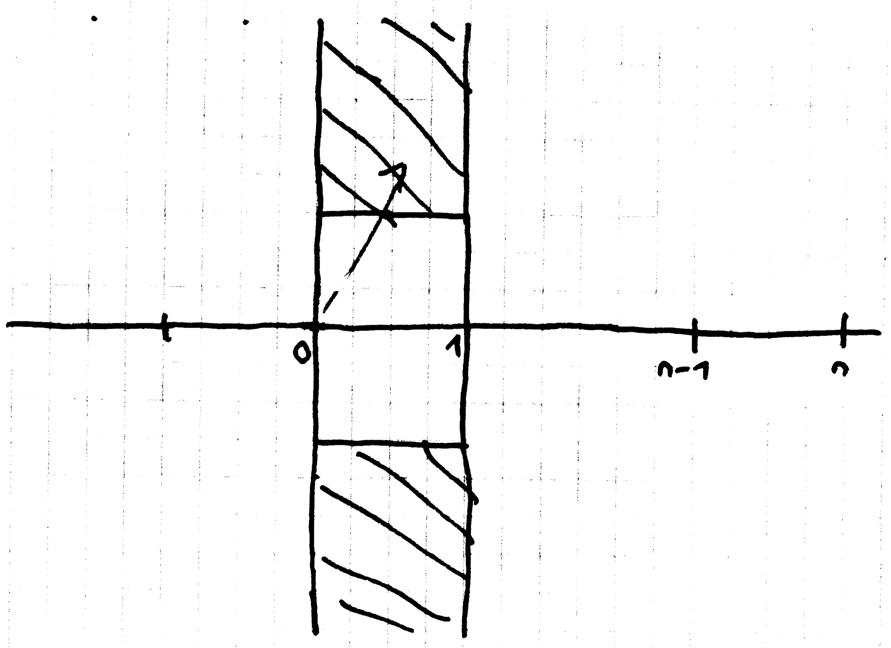
Um f_0 zu bestimmen leiten wir ab.

$$-\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 = f_0'(z) \underbrace{- \frac{1}{z^2} - \sum{}' \frac{1}{(z-n)^2}}_{-g'(z)}$$

Wir betrachten die Reihe

$$f_1(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$$

$f_1(z)$ ist periodisch mit Periode 1,
$f_1(z+1) = f_1(z)$ und hat Pole $z \in \mathbb{Z}$
zweiter Ordnung.



Betrachten den Streifen

$S = \{ z = x+iy \mid 0 \le x \le 1,\ |y| \ge 1$

$\left|\frac{1}{(z-n)^2}\right| \le \max\left\{\frac{1}{(n-1)^2}, \frac{1}{n^2}\right\}, \quad n \neq 0,1$

Damit konvergiert die Reihe f_1 absolut und gleichmäßig auf dem Streifen S

Wir können also ein n_0 finden,
sodass $\left| f_1(z) - \sum_{n=-n_0}^{n_0} \frac{1}{(z-n)^2} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$
auf S ist.

Ferner lässt sich ein $R>0$ bestimmen sodass
für $|\mathrm{Im}(z)| \ge R$ $\left| \sum_{|n|\le n_0} \frac{1}{(z-n)^2} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$

Berücksichtigt man die Periodizität,
so folgt:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ $\exists R>0$ mit $|f_1(z)| < \varepsilon$ $\forall x+iy$ mit $|y| \ge R$

Die gleiche Eigenschaft hat die Funktion $\left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2$,
denn $\sin \pi z = \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i}$ wird für $|\mathrm{Im}(z)| >> 0$
betragsmäßig beliebig groß.

Also

$$f_0'(z) = -\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 + f_1(z)$$

ist eine 1-periodische Funktion,
die für $|y| \geq R$ und $R \to \infty$ gegen 0 strebt

Damit $f_0'(z)$ nach dem Satz von Liouville konstant und für $|y| \to \infty$ strebt der Wert gegen 0, also $f_0'(z) \equiv 0$.

13.14 Satz

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$$

Beweis: Klar?

Für unser Ausgangsproblem ergibt sich

$$\pi \cot(\pi z) = f_0(z) + \frac{1}{z} + \sum{}' \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$$

wobei f_0 eine konstante Funktion ist.

Da der Cotangens und die Reihe ungerade Funktionen sind

$$\cot(-\pi z) = -\cot(\pi z)$$

muss $f_0(0) = 0$ gelten.

Also $f_0 \equiv 0$ und die Formel von Euler ist bewiesen. $\square$

14. Produktentwicklungen

14.1

Polynome f haben eine Darstellung

$$f(z) = b \cdot \prod_{\nu=1}^{k} (z - a_\nu)^{n_\nu}$$

Hat eine ganze Funktion unendlich viele Nullstellen, so kann man versuchen sie als unendliches Produkt darzustellen.

14.2 Definition

Es sei (a_ν) eine Folge komplexer Zahlen in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$
Das Produkt

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$$

existiert (konvergiert), wenn die Folge der Partialprodukte

$$b_n = \prod_{\nu=1}^{n} a_\nu$$

eine konvergente Folge bildet

Ist b der Grenzwert, so schreiben wir

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = b$$

und meinen

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{\nu=1}^{n} a_\nu = b$$

Ist (a_ν) eine beliebige Folge in $\mathbb{C}$, so heißt

$$\prod_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$$

konvergent, wenn

$$\prod_{\substack{\nu=0 \\ a_\nu \neq 0}}^{\infty} a_\nu$$
konvergiert.

Ist wenigstens ein $a_\nu = 0$, so hat das Produkt
$$\prod_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = 0$$
den Wert 0.

Erinnerung Analysis 1:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ Primzahl}} \frac{1}{(1-\frac{1}{p^s})} \qquad \text{(Eulerprodukt)}$$
eindeutige Primfaktorzerlegung + gleichmäßige Konvergenz

14.3 Bemerkung

Für ein konvergentes Produkt $\prod_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = a \neq 0$
$$\lim_{\nu \to \infty} a_\nu = 1,$$
denn
$$a_n = \frac{\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu}{\prod_{\nu=1}^{n-1} a_\nu} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{a}{a} = 1$$
Man schreibt daher ∞-Produkte in der Form
$$\prod_{\nu=1}^{\infty} (1+u_\nu)$$

Für die Konvergenz ist dann $\lim_{\nu \to \infty} u_\nu = 0$ notwendig

Zunächst einige Hilfsätze zu endlichen Produkten

14.4 Satz

$\prod_{\nu=1}^{\infty} (1+u_\nu)$ konvergiert sicher dann, wenn zu jedem ν ein Wert $\log(1+u_\nu)$ gewählt werden kann, dass $\sum_{\nu=1}^{\infty} \log(1+u_\nu)$ konvergiert.

Beweis: Falls $\sum_{\nu=1}^{\infty} \log(1+u_\nu)$ existiert,
dann existiert auch

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{\nu=1}^{n} (1+u_\nu) = \lim_{n\to\infty} \prod_{\nu=1}^{n} \exp(\log(1+u_\nu))$$

$$= \lim_{n\to\infty} \exp\left(\sum_{\nu=1}^{n} \log(1+u_\nu)\right)$$

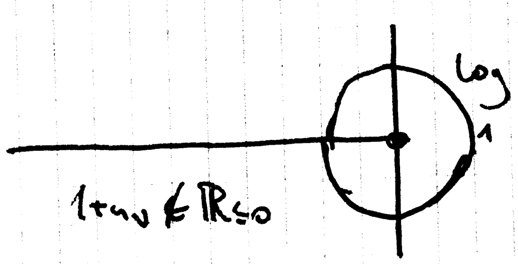
$$= \exp\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \log(1+u_\nu)\right),$$

wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion. $\square$

14.5 Satz

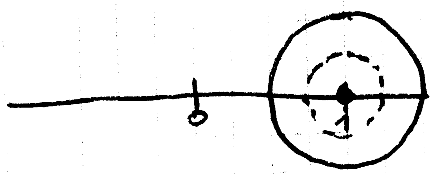
$\sum_{\nu=1}^{\infty} \mathrm{Log}(1+u_\nu)$ konvergiert genau dann absolut, wenn $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ absolut konvergiert.
Dabei bezeichnet Log den Hauptteil des Logarithmus und $u_\nu \notin \mathbb{R}_{\leq -1}$ sei vorausgesetzt.

Bild:



Beweis: Wir verwenden die Formel

$$\mathrm{Log}(1+u) = \int_{[1;1+u]} \frac{dz}{z}$$



Für $|u| \leq \frac{1}{4}$ gilt:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{4}} \leq \frac{1}{|z|} \leq \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \quad \forall z \in [1; 1+u]$$

Also

$$\frac{4}{5} \cdot |u| \leq |\mathrm{Log}(1+u)| \leq \frac{4}{3} \cdot |u|$$

und die Behauptung folgt.

14.6 Definition

$\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+u_\nu)$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum u_\nu$ absolut konvergiert.
Äquivalent: wenn die Produkte
$\prod_{\nu=1}^{\infty} 1+|u_\nu|$, $\sum_{\nu=1}^{\infty}|\mathrm{Log}(1+u_\nu)|$, $\sum_{\nu=1}^{\infty}|u_\nu|$
konvergieren.

Für Funktionenfolgen definieren wir analog:

14.7 Definition

Sei (f_ν) eine Folge von stetigen Funktionen auf einem Gebiet G.
Das Produkt

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+f_\nu)$$

konvergiert punktweise gegen eine Grenzfunktion $f: G \to \mathbb{C}$, wenn für jedes $z \in G$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(1+f_\nu(z)) = f(z)$$

gilt.

Das Produkt

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+f_\nu)$$

heißt absolut kompakt konvergent, wenn $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$ absolut kompakt konvergiert.

14.8 Satz

Äquivalent sind:

(i) $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+f_\nu)$ konvergiert absolut kompakt auf G

(ii) Zu jeden Kompaktum $K \subset G$ gibt es ein ν_0, sodass $\sum_{\nu \geq \nu_0} \operatorname{Log}(1+f_\nu)$ absolut und gleichmäßig konvergiert.

Beweis: Für z mit $|f_\nu(z)| \leq \frac{1}{4}$ gilt:

$$\frac{4}{5}|f_\nu(z)| \leq |\operatorname{Log}(1+f_\nu(z))| \leq \frac{6}{5}|f_\nu(z)|$$

Beide Bedingungen (i), (ii) implizieren, dass für jedes Kompaktum $K \subset G$ ein ν_0 existiert, sodass

$$|f_\nu(z)| \leq \frac{1}{4} \quad \forall z \in K \ \forall \nu \geq \nu_0$$

Die Behauptung folgt aus den Ungleichungen

14.9 Folgerung

Die Partialprodukte eines absolut konvergenten Produkts bilden eine kompakt konvergente Folge.

Beweis: $$\prod_{\nu=1}^{n}(1+f_\nu(z)) = \prod_{\nu=1}^{\nu_0-1}(1+f_\nu(z)) \prod_{\nu=\nu_0}^{n}(1+f_\nu(z))$$

$$= \prod_{\nu=1}^{\nu_0}(1+f(z)) \exp\left(\sum_{\nu=\nu_0}^{n} \operatorname{Log}(1+f_\nu(z))\right)$$

Nun ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} \operatorname{Log}(1+f_\nu(z))$ kompakt konvergent und die Exponentialfunktion stetig, also sind auch die Partialprodukte kompakt konvergent. $\square$

14.10 Folgerung

Die Grenzfunktion eines absolut kompakt konvergenten Produktes $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+f_\nu)$ holomorpher Funktionen f_ν auf einem Gebiet G ist holomorph

$\square$

14.11 Definition

Eine Nullstellenverteilung in $\mathbb{C}$ besteht aus einer Menge $N = \{(a_k, n_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$, wobei $a_k \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden sind und diskret in $\mathbb{C}$ liegen und $n_k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Zu einer ganzen Funktion f bezeichnet

div $f = \{(a_k, n_k) \mid$ wobei a_k die Menge der Nullstellen von f durchläuft und n_k die Vielfachheiten der Nullstelle a_k ist$\}$

den Divisor der Nullstellen von f.

Dann:

$(a,n) \in \operatorname{div} f \iff \frac{f}{(x-a)^n}$ hat eine hebbare Singularität in a, $\frac{f}{(x-a)^{n+1}}$ hat einen Pol in a.

Zu einer Nullstellenverteilung $N = \{(a_k, n_k)\}$ heißt eine ganze Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$\operatorname{div} f = N$

eine Lösung der Nullstellenverteilung N.