2016-04-25 (2)

3. Wegintegrale

3.1 Definition

Ein **Integrationsweg** in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist eine stetige stückweise stetig diffbare Abbildung $\gamma : [a,b] \to G$.

γ heißt **glatt**, wenn γ überall diffbar und $\gamma'(t) \neq 0 \ \forall t \in [a,b]$

γ heißt **geschlossen**, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$, Anfangspunkt und Endpunkt übereinstimmen.

$\gamma([a,b]) \subset G$ heißt **Spur von γ** und $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt$ die **Bogenlänge von γ**.

3.2

In der ANALYSIS III Vorlesung zeigt man, dass Kraftfelder auf $\mathbb{R}^2$ am besten durch Differentialform dargestellt werden und die Arbeit durch

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b (g(\gamma(t))\, \gamma_1'(t) + h(\gamma(t))\, \gamma_2'(t))\, dt$$

erklärt wird, wobei $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ ein Weg ist.

Wir werden Differentialformen für Zwecke der FUNKTIONENTHEORIE verwenden.

2016-04-28 (3)

Zunächst dürfen $f, g : G \to \mathbb{C}$ komplexwertig sein. Ferner ist das Wirtinger-kalkül mit $dz = dx + i\,dy$, $d\bar{z} = dx - i\,dy$ praktischer.

3.3 Definition

Eine stetige komplexe Differentialform ω auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ ist ein Ausdruck $\omega = f\,dz + g\,d\bar{z}$ mit $f, g : G \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen.

Für einen Integrationsweg $\gamma : [a,b] \to G$ ist das Wegintegral durch

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma (f\,dz + g\,d\bar{z}) := \int_a^b [f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) + g(\gamma(t))\, \overline{\gamma'(t)}]\, dt$$

erklärt.

3.4 Beispiel

Für $G = \mathbb{C} \setminus \{c\}$ ist $\omega = \frac{dz}{z}$ eine Differentialform auf G und für den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\gamma(t) = e^{it}$ gilt

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} e^{-it}\, i e^{it}\, dt = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i$$

3.5 Bemerkung

Wegintegrale ändern sich nicht bei Parameterwechsel für den Weg (wegen der Kettenregel).

3.6 Definition

Sei $F: G \to \mathbb{C}$ eine reell stetig diffbare Funktion. Dann ist das totale Differential von F durch

$$dF = \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

definiert.

3.7 Bemerkung

Ersetzt man $\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} - i \frac{\partial F}{\partial y}\right)$

und $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y}\right)$

sowie $dz = dx + i\,dy$, $d\bar{z} = dx - i\,dy$, so sieht man, dass

$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$ das übliche totale Differential ist.

3.8 Satz

Sei $F: G \to \mathbb{C}$ eine reelle stetig diffbare Funktion auf Gebiet G und $\gamma: [a,b] \to G$ ein Integrationsweg.

Dann gilt: $\int_\gamma dF = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$

BEWEIS

Wir betrachten die Komposition $F \circ \gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$.

Nach der Kettenregel (im Wirtingerkalkül geschrieben) gilt:

$$\frac{d(F \circ \gamma)}{dt}(t) = \frac{\partial F}{\partial z}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(\gamma(t)) \cdot \overline{\gamma'(t)}$$

ist $F \circ \gamma$ die Stammfunktion des Integranten in

$$\int_\gamma dF = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial z}(\gamma(t))\, \gamma'(t) + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(\gamma(t))\, \overline{\gamma'(t)} \right) dt$$

Die Aussage folgt aus dem Hauptsatz.

$\boxtimes$

3.9 Definition

Eine **Stammfunktion** von $f: G \to \mathbb{C}$ ist eine komplex diffbare Funktion $F: G \to \mathbb{C}$ mit $F' = f$.

3.10 Korollar

Sei $f: G \to \mathbb{C}$ stetig und F eine Stammfunktion f

Dann gilt für jeden Integrationsweg $\gamma [a,b] \to G$

$$\int_\gamma f dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

BEWEIS

$dF = \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$ Nach § 2 gilt dann.

$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial z} = f$. Also $dF = f dz$ und Satz 3.8 lässt sich anwenden. ☒

3.11 Korollar

Es sei $f: G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die auf G eine Stammfunktion besitzt.

Dann gilt für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in G

$$\int_\gamma f dz = 0$$

3.12 Beispiele

1) Die Funktion $f(z) = z^n$ für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ hat die Stammfunktion

$F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$ auf $\mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{C} \setminus \{0\}$)

Für beliebige Integrationswege (in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$) mit Anfangspunkt z_0 und Endpunkt gilt:

$$\int_\gamma z^n dz = \frac{1}{n+1} (z_1^{n+1} - z_0^{n+1}) \qquad (n \neq -1)$$

2) Ein Polynom $f(z) = \sum_{n=0}^{d} a_n z^n$ hat die Stammfunktion

$$F(z) = \sum_{n=0}^{d} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$$

3) $f(z)=\frac{1}{z}$ hat auf $G=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ keine Stammfkt., denn für $\gamma:[0,2\pi]\to G$,
$\gamma(t)=e^{it}$ ist geschlossen und $\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0$

Die Umkehrung von 3.11 ist auch richtig.

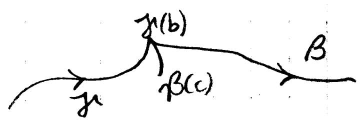
3.13 Satz

Sei f auf einem Gebiet G stetig. Wenn für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in G $\int_\gamma f\,dz=0$ gilt, dann hat f eine Stammfkt F auf G.

3.14 Notation

1) Sind $\gamma:[a,b]\to G$ und $\beta:[c,d]\to G$ zwei Integrationswege in G mit $\gamma(b)=\beta(c)$, so definieren wir den Weg

$$\gamma\beta:[a,b+c-d]\to G$$



durch
$$(\gamma\beta)(t)=\begin{cases}\gamma(t) & \text{für } t\leq b\\ \beta(t-b+c) & \text{für } t\geq b\end{cases}$$

$\gamma\beta$ heißt der hintereinander durchlaufende Integrationsweg.

2) Für $z_0,z_1\in\mathbb{C}$ bezeichnet $[z_0,z_1]:[0,1]\to\mathbb{C}$,
$[z_0,z_1](t)=z_0+t(z_1-z_0)$ die Strecke von z_0 nach z_1.

3) Zu $\gamma:[a,b]\to G$ bezeichnet $\gamma^{-1}:[a,b]\to G$, $\gamma^{-1}(t):=\gamma(a+b-t)$ den rückwärtsdurchlaufen Weg oder umgekehrten Weg.

BEWEIS (Satz 3.13)

Sei $p\in G$ ein fester Punkt. Da G wegzusammenhängend ist, existiert für jeden Punkt $z\in G$ ein Weg γ_z nach z. Wir definieren

$$F(z)=\int_{\gamma_z} f\,dz$$

Nach Voraussetzung ist F wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl von γ_z. Ist nämlich $\tilde{\gamma}_z$ ein weiterer Weg, $\gamma_z\tilde{\gamma}_z^{-1}$ ein geschlossener Weg und es gilt

$$0=\int_{\gamma_z\tilde{\gamma}_z^{-1}} f\,dz=\int_{\gamma_z} f\,dz+\int_{\tilde{\gamma}_z^{-1}} f\,dz=\int_{\gamma_z} f\,dz-\int_{\tilde{\gamma}_z} f\,dz$$

Wir zeigen, dass F eine Stammfunktion von f ist.

Sei z ein Punkt nahe bei z_0 in G. Dann liegt die Strecke $[z_0, z]$ in G.

Nach Vor. gilt für den geschlossenen Weg

$$\gamma_{z_0} [z_0, z] \gamma_z^{-1}$$

$$0 = \int_\gamma f dz = \int_{\gamma_{z_0}} f dz + \int_{[z_0,z]} f dz - \int_{\gamma_z} f dz$$

Also: $\quad F(z) - F(z_0) = \int_{[z_0,z]} f dz$

$$\int_{[z_0,z]} f dz = \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))\,(z - z_0)\, dt$$

$$= (z - z_0)\, A(z)$$

mit $\; A(z) = \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))\, dt$

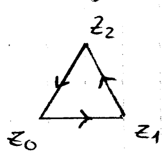
Es gilt also $\; A(z_0) = f(z_0)$.

Bleibt die Stetigkeit von A in z_0 zu zeigen.

Da $\qquad |A(z) - A(z_0)| \leq \max_{t \in [0,1]} |f(z_0 + t(z - z_0)) - f(z_0)|$

folgt die Stetigkeit von f in z_0. $\boxtimes$

Für konvexe Gebiete $G \subset \mathbb{C}$, d.h. mit $z_0, z_1 \in G$ liegt auch die Strecke $[z_0, z] \subset G$, folgt die Existenz einer Stammfunktion schon, wenn wir voraussetzen, dass für jedes Dreieck Δ mit Ecken z_0, z_1, z_2 das Integral über den Rand $\quad \partial\Delta := [z_0, z_1][z_1, z_2][z_2, z_0]$



$$\int_{\partial\Delta} f dz = 0$$

3.15 Satz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und $f: G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann gilt für jedes (abgeschlossenes) Dreieck $\Delta \subset G \quad \int_{\partial\Delta} f dz = 0$, dass f eine Stammfunktion auf G hat.

BEWEIS

Im Beweis von Satz 3.13 können wir $\gamma_z = [p,z]$ fest wählen.

Dann ist $F(z) = \int_{[p,z]} f\,dz$ wohldefiniert und das Argument für

$F(z) - F(z_0) = \int_{[z_0,z]} f\,dz$ geht durch. $\boxtimes$

2016-04-28
(3)

4. Der Cauchysche Integralsatz

Der folgende Satz und seine Folgen sind fundamental für die FUNKTIONENTHEORIE.

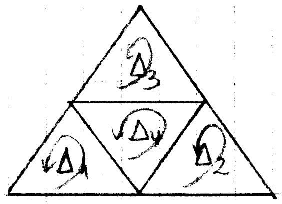
4.1 Satz (Goursat)

Es sei $\Delta \subset \mathbb{C}$ ein abgeschlossenes Dreieck und f eine auf einer Umgebung von Δ definierte holomorphe Funktion. Dann gilt: $\int_{\partial\Delta} f dz = 0$

BEWEIS

Sei f in einer Umgebung von Δ holomorph.

Wir zerlegen Δ in 4 Teildreiecke, indem wir die Seitenmitten miteinander verbinden.



Bei Summe $\sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta_j} f dz$ landen die im Inneren gelegenen Strecken zweimal umgekehrt durchlaufen. Diese fallen in der Summe weg, es gilt

$$\int_{\partial\Delta} f dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta_j} f dz$$

Also $\left| \int_{\partial\Delta} f dz \right| \leq 4 \cdot \max_j \left| \int_{\partial\Delta_j} f(z) dz \right|$

Wir wählen unter diesen 4 Dreiecken eins mit maximalem Betrag für das Integral aus: $\Delta^1 = \Delta_j$, j so gewählt, dass das Maximum oben angenommen wird.

Für die Bogenlänge gilt: $L(\partial\Delta^1) = L(\partial\Delta_j) = \frac{1}{2} L(\partial\Delta)$

Wir wiederholen dieses Argument nun mit Δ^1 und Δ^2 und erhalten in Δ^2 eine Folge $\Delta = \Delta^0 \supset \Delta^1 \supset \Delta^2 \supset \dots$ von Dreiecken

mit $\quad \left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta^n} f(z) dz \right| \qquad (1)$

und $\quad L(\partial\Delta^n) = \frac{1}{2} L(\partial\Delta^{n-1}) = \dots = \frac{1}{2^n} L(\partial\Delta^0) \qquad (2)$

Wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ existiert ein Punkt

$z_0 \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \Delta^n$

⊛ Die lineare Funktion $f(z_0) + (z-z_0)f'(z_0)$ hat eine Stammfunktion.

Wir verwenden die komplexe Differenzierbarkeit von f in z_0:

$$f(z) = f(z_0) + (z-z_0)(f'(z_0) + A(z))$$

mit einer in z_0 verschwindenen und in z_0 stetigen Funktion $A(z)$. ⊛

Es folgt
$$\left|\int_{\partial\Delta^n} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{\partial\Delta^n} (z-z_0)\,A(z)\,dz\right|$$
$$\leq L(\partial\Delta^n) \max_{z\in\partial\Delta^n} |(z-z_0)\,A(z)|$$
$$\leq L(\partial\Delta^n)^2 \max_{z\in\partial\Delta^n} |A(z)|$$

da für $z \in \partial\Delta^n$ $L(|z-z_0|) \leq L(\partial A^n)$

Also
$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right| \leq (L(\partial\Delta^n))^2 \cdot \max_{z\in\partial\Delta^n} |A(z)|$$
$$= L(\partial\Delta) \cdot \max_{z\in\partial\Delta^n} |A(z)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

da $A(z)$ stetig in z_0 und $A(z_0) = 0$

$\boxtimes$