8. Der Logarithmus

8.1

Die Exponentialabbildung $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto e^z$ ist surjektiv.
In der Tat ist $w = \log|z| + i \cdot \arg(z)$ für jede Wahl des Arguments ein Logarithmus.
Wir schreiben $w = \log(z)$. Da $\arg(z)$ bis auf Vielfache von 2π bestimmt ist, ist $\log(z)$ bis auf Vielfache von $2\pi i$ bestimmt.

8.2 Definition

Sei $G \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet. Eine stetige Funktion $f: G \to \mathbb{C}$ mit $e^{f(z)} = z$ $\forall z \in G$ heißt ein **Zweig des Logarithmus** auf G.

8.3

Sind f, g Zweige des Logarithmus, so gilt $e^{f(z)-g(z)} = 1$, also $f(z) - g(z) \in 2\pi i \mathbb{Z}$ für $z \in G$. Da $f-g$ stetig ist auf G und nur diskrete Werte hat, ist $f-g$ auf G konstant.
Verschiedene Zweige des Logarithmus unterscheiden sich um Vielfache von $2\pi i$

8.4 Satz

Sei $G \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet und $f: G \to \mathbb{C}$ ein Zweig des Logarithmus.
Dann ist f holomorph und es gilt $f'(z) = \frac{1}{z}$

BEWEIS

$(\exp'(z) \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}) \rightarrow \exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ ist lokal biholomorph
D.h. zu jedem $w \in \mathbb{C}$ existiert eine Umgebung U, so dass $\exp|_U : U \to \exp(U)$ biholomorph ist. Wenden wir dies nun auf $w = f(z)$ an, so sehen wir, dass f als Umkehrfunktion von exp biholomorph ist und

$$f'(z) = \frac{1}{\frac{d}{dw}\exp(w)} = \frac{1}{\exp(w)} = \frac{1}{\exp(f(z))} = \frac{1}{z}$$

$\boxtimes$

8.5 Satz

Sei $G \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet. Äquivalent sind:

(i) Auf G existiert ein Zweig des Logarithmus.

(ii) $\frac{1}{z}$ hat eine Stammfunktion auf G.

(iii) Für jeden Zyklus Γ in G gilt $n(\Gamma,0)=0$.

BEWEIS

(i) $\Rightarrow$ (ii): gilt nach 8.4 ✓

(ii) $\Rightarrow$ (i): Ist g eine Stammfunktion von $\frac{1}{z}$, dann gilt

$$(z\cdot e^{-g(z)})' = (1-z\cdot g'(z))\cdot e^{-g(z)} = 0$$

Also $z\cdot e^{-g(z)} \equiv d$ für ein konstantes d. Schreiben wir die Konstante $d=e^c$, so folgt $f(z)=g(z)+c$ ist ein Zweig des Logarithmus.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Hat $\frac{1}{z}$ eine Stammfunktion auf G, so gilt für jeden Zyklus Γ in G

$\int_\Gamma \frac{1}{z}\,dz = 0$, da das Integral die Differenz der Werte von Anfangs- und Endpunkt ist. Also $n(\Gamma,0)=\int_\Gamma \frac{1}{z}\,dz = 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Gilt $n(\Gamma,0)=0$ für jeden Zyklus, folgt $\int_\Gamma \frac{1}{z}\,dz=0$. Also existiert nach §3 eine Stammfunktion.

$\boxtimes$

8.6 Beispiele !

1) Auf $\mathbb{C}^*$ existiert kein Zweig des Logarithmus, denn $n(\partial D,0)=1$, $D=D_1(0)$.

2) Ist $G\subset\mathbb{C}^*$ einfach zusammenhangend, so ist (iii) immer erfüllt.

3) Am häufigsten wird $G=\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-=\mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{R}\mid z\le 0\}$ betrachtet. In diesem Gebiet ist $\mathrm{Log}(z)=\int_{[1,z]}\frac{d\xi}{\xi}$ ein Zweig des Logarithmus. Dieser heißt **Hauptzweig des Logarithmus**.

$\mathrm{Log}|_{\mathbb{R}>0} = \log$ (reelle Logarithmus)

(Man kann leicht zeigen $\mathrm{Log}(z) = \underset{\text{Kreisbogen}}{\log|z|} + \underset{\text{Winkel}}{i\cdot\arg(z)}$)

→ Also: $\mathrm{Log}(z)$ bezeichnet den Hauptzweig des Logarithmus, $\log(z)$ bezeichnet irgendeine Wahl des Logarithmus und ist nur bis auf Vielfache von $2\pi i$ eindeutig bestimmt.

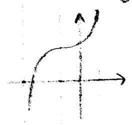
Um $z=1$ ist die Potenzreihe durch $\mathrm{Log}(1+z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{z^\nu}{\nu}$ gegeben.

Konvergenzradius ist $R=1$, $\mathrm{Im}\,\mathrm{Log}(z)\in\,]-\pi,\pi[$. (4)

2016-05-30
(9)

5) Sei $\gamma: [-1,1] \to \mathbb{C}^*$ ein stetiger Weg mit $\gamma(0) \in \mathbb{R}_-$ und $\gamma(t) \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_-$ $\forall t \neq 0$.

Dann existieren $\lim\limits_{t \searrow 0} \operatorname{Log}(\gamma(t))$ und $\lim\limits_{t \nearrow 0} \operatorname{Log}(\gamma(t))$, stimmen aber nicht überein



Ist $\operatorname{Im} \gamma(t) > 0$ für $t > 0$ $(\arg(z) \in (0,\pi))$ und $\operatorname{Im} \gamma(t) < 0$ für $t < 0$ $(\arg(z) \in (-\pi, 0))$, so ist $\lim\limits_{t \searrow 0} \operatorname{Log}(\gamma(t)) - \lim\limits_{t \nearrow 0} \operatorname{Log}(\gamma(t)) = 2\pi i$

Log hat also einen Sprung um $2\pi i$ entlang der negativen reellen Achse.

6) Allgemeiner kann man $\mathbb{C}^*$ entlang eines beliebigen stetigen Weges $\gamma: [0,\infty[\to \mathbb{C}^*$ mit $\gamma(0) = 0$ und $\lim\limits_{t \to \infty} \gamma(t) = \infty$ aufschneiden. Auf $G = \mathbb{C} \setminus \gamma([0,\infty[)$ existiert dann ein Zweig des Logarithmus.

BEWEIS:

Es ist $n(\Gamma, 0) = 0$ für jeden Zyklus in G. Da $\Gamma \subset G$, hängt $n(\Gamma, \gamma(t))$ stetig von t ab und ist ganzzahlig, also höchstens $0 = n(\Gamma, \gamma(t))$ für $t \gg 0$, da $\lim\limits_{t \to \infty} \gamma(t) = \infty$ ☒

8.7 Satz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f: G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion ohne Nullstellen.

Dann existiert eine holomorphe Funktion $g: G \to \mathbb{C}$ mit $e^{g(z)} = f(z)$.

BEWEIS

Da $f(z) \neq 0$ $\forall z \in G$ ist $\frac{f'}{f}$ holomorph auf G. Da G einfach zusammenhängend ist, existiert eine Stammfunktion h von $\frac{f'}{f}$.

Wegen $\left(f(z) e^{-h(z)}\right)' = e^{-h(z)} \left(f'(z) - f(z) \cdot h'(z)\right) \equiv 0$,

ist $f(z) = e^{h(z) + c}$ für eine geeignete Konstante c. ☒

8.8

Hat man einen Logarithmus $\log(a)$, so kann man beliebige Potenzen a^b durch

$a^b := \exp(b \cdot \log(a))$ definieren.

Im Allgemeinen ist dies aber, da $\log(a)$ nur bis auf Vielfache von $2\pi i$ definiert ist, auch nicht eindeutig bestimmt.

8.9 Beispiele

1) $b = n \in \mathbb{Z}$, $a = z$. Dann ist $z \mapsto z^n$ wohldefiniert, denn $\exp(n \log(z)) = \exp(n \cdot (\log(z) + 2\pi i h)) = z^n$, da $n \cdot h \in \mathbb{Z}$.

2) Für $b = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{Z}$ ist $n^{1/z}$ bis auf einen Faktor $\zeta_n^k = \exp(\frac{2\pi i h}{n})$, $h = 0, \dots, n-1$, eindeutig bestimmt.
Auf $G = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ gibt es also genau n holomorphe Funktionen
$f_k(z) := \exp(\frac{1}{n}(\operatorname{Log}(z) + 2\pi i h))$ mit der Eigenschaft $f_k(z)^n = z \quad \forall z \in G$.
Man nennt f_k einen **Zweig der n-ten Wurzel** auf G.

Bemerkung:
Durchläuft man die negative reelle Achse von oben nach unten, so setzt sich f_k zu f_{k+1} stetig fort und schließlich f_{n-1} zu $f_n = f_0$.

2016-05-30

9. Isolierte Singularitäten und Laurentreihen

9.1 Definition

Sei G ein Gebiet, $z_0 \in G$ und $f: G \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion.

Dann nennt man z_0 eine **isolierte Singularität** von f.

Grundsätzlich unterscheidet man 3 Arten von Singularitäten:

(i) **hebbare Singularitäten**, d.h. $\exists$ eine holomorphe Funktion $g: G \to \mathbb{C}$ mit $g|_{G\setminus\{z_0\}} = f$

(ii) **Pole**: Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $(z-z_0)^n \cdot f$ eine hebbare Singularität hat. Ist n minimal gewählt, so dass $(z-z_0)^n f$ hebbar ist, so spricht man von einem Pol n-ter Ordnung.

(iii) **Wesentliche Singularitäten**: Für kein $n \geq 0$ hat $(z-z_0)^n \cdot f$ eine hebbare Singularität.

9.2 Satz (Riemannscher Hebbarkeitssatz)

Sei $f: G \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Existiert eine Umgebung U von z_0, so dass $f|_{U\setminus\{z_0\}}$ beschränkt ist, dann hat f eine hebbare Singularität.