14.12 Satz

Sind f, g Lösungen derselben Nullstellenverteilung auf $\mathbb{C}$, dann gibt es eine ganze Funktion h, sodass $f = e^h \cdot g$.

Beweis: $\frac{f}{g}$ ist eine ganze Funktion ohne Nullstellen (nach Heben der Singularitäten).

Da $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend ist, existiert eine ganze Funktion h mit $e^h = \frac{f}{g}$ $\square$

14.13 Satz

Ist f eine Lösung der Nullstellenverteilung $N = \{(a_k | n_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$, dann ist $\frac{f'}{f}$ eine Lösung der Hauptverteilung $H = \{\frac{n_k}{z - a_k} \mid k \in \mathbb{N}\}$

Beweis: Schreiben wir

$$f(z) = (z - a_k)^{n_k} g(z) \quad \text{mit } g(a_k) \neq 0$$

so ergibt sich

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_k}{z - a_k} + \underbrace{\frac{g'(z)}{g(z)}}_{\substack{\text{holomorph} \\ \text{da } g(a_k) \neq 0}}$$ $\square$

14.14

Dieser Satz gibt uns einen Ansatz für die Lösung einer Nullstellenverteilung. Die Punkte a_k seien so nummeriert, dass

$$|a_0| = 0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \ldots$$

Für n_0 lassen $n_0=0$ zu.

Die Hauptverteilung $\{\frac{a_k}{z-a_k} \mid k\in\mathbb{N}\}$ hat nach Satz aus Kapitel 13 eine Lösung der Gestalt

$$h(z) = n_0\cdot\frac{1}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} n_\nu\left(\frac{1}{z-a_\nu} + \frac{1}{a_\nu}\cdot\sum_{\mu=0}^{k_\nu}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{\mu}\right)$$

Dabei sind die k_ν so bestimmt, dass die Reihe auf $\mathbb{C}$ kompakt konvergiert.

Wir bilden nun

$$u_\nu(z) = \left[\left(1-\frac{z}{a_\nu}\right)\exp\left(\sum_{\mu=0}^{k_\nu}\frac{1}{\mu+1}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{\mu+1}\right)\right]^{n_\nu}$$

Dann gilt:

$$\frac{u_\nu'}{u_\nu} = h_\nu$$

⌈Nebenrechnung:

$$\log u_\nu = n_\nu\cdot\log\left(1-\frac{z}{a_\nu}\right) + \sum_{\mu=0}^{k_\nu}\frac{1}{\mu+1}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{\mu+1}$$

$$\frac{u_\nu'}{u_\nu} \overset{\text{Kettenregel}}{=} (\log(u_\nu))' = n_\nu \underbrace{\frac{-1/a_\nu}{1-\frac{z}{a_\nu}}}_{\frac{1}{z-a_\nu}} + \left(\sum_{\mu=0}^{k_\nu}\left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{\mu}\right)\frac{1}{a_\nu}$$ ⌋

Falls das Produkt

$$u(z) = z^{n_0}\cdot\prod_{\nu=1}^{\infty} u_\nu(z)$$

kompakt konvergiert, löst es die Nullstellenverteilung N.

Um Konvergenz zu zeigen betrachten für beliebiges $R>0$, ν_0 so groß, dass $|a_\nu|>R$ $\forall \nu\geq\nu_0$

Die Funktion u_ν ist dann auf $D_R(0)$ nullstellenfrei und wir können

$$\vartheta_\nu(z) = \int_0^z \frac{u_\nu'(\xi)}{u_\nu(\xi)}\,d\xi = \int_{[0,z]} h_\nu(\xi)\,d\xi$$

definieren

Dann gilt:

$$e^{v_\nu(z)} = u_\nu(z)$$

$$\Rightarrow v_\nu(z) = \log(u_\nu(z)) + c$$

$\Big[$ $v_\nu'(z) = \frac{u_\nu'(z)}{u_\nu(z)} = (\log u_\nu(z))'$

$\Rightarrow v_\nu(z) = \log(u_\nu(z)) + c$

$e^{v_\nu(z)} = u_\nu(z) \cdot e^c$

$1 = e^0 = e^{v_\nu(0)} = e^c \cdot u_\nu(0) = e^c$

$\Rightarrow e^c = 1$ $\Big]$

Wegen der Konvergenz der Reihe $\sum h_\nu$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{\nu \geq \nu_0} v_\nu(z) = \sum_{\nu \geq \nu_0} \log u_\nu$$

gleichmäßig auf $D_R(c)$.

Also konvergiert $\prod_{\nu \geq \nu_0} u_\nu(z)$ auf $D_R(c)$ gleichmäßig

Dies zeigt:

14.15 Satz (Weierstraß'scher Produktsatz)

Es sei $N = \{(a_k, n_k) \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ eine Nullstellenverteilung mit $|a_0| = 0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots$

Wählt man Zahlen k_ν so groß, dass die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} n_\nu \left(\frac{1}{z-a_\nu} + \frac{1}{a_\nu} \sum_{\mu=0}^{k_\nu} \left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{\mu} \right)$$

kompakt auf $\mathbb{C}$ konvergiert, so stellt das Produkt

$$f(z) = z^{n_0} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right) \exp\left(\sum_{\mu=0}^{k_\nu} \frac{1}{\mu+1} \left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{\mu+1} \right) \right]^{n_\nu}$$

eine ganze Funktion mit

$$\operatorname{div}(f) = N$$

dar

(Für $k_\nu = -1$ ist dabei $\sum_{\mu=0}^{-1} \dots = 0$

Beweis: 14.14 $\square$

14.16 Beispiel

Die Funktion $\sin(\pi z)$ hat einfache Nullstellen in $a_\nu = \nu$, $\nu \in \mathbb{Z}$.

Nach dem Weierstraß'schen Produktsatz gilt:

$$\sin(\pi z) = e^{g_0(z)} \cdot z \cdot \prod_{\nu \neq 0} \left(1 - \frac{z}{\nu}\right) e^{z/\nu},$$

da $\sum' \left(\frac{1}{z-\nu} + \frac{1}{\nu}\right)$ auf $\mathbb{C}$ kompakt konvergiert.

Bilden wir die Logarithmische Ableitung, so erhalten wir

$$\pi \cot(\pi z) = g_0'(z) + \frac{1}{z} + \sum' \left(\frac{1}{z-\nu} + \frac{1}{\nu}\right)$$

Also nach Kapitel 13 gilt:

$g_0'(z) \equiv 0$, also g_0 konstant

Da $\frac{\sin(\pi z)}{z}$ in 0 holomorph ergänzbar ist, muss $e^{g_0} = \pi$ sein, also:

14.17 Satz (Produktentwicklung des Sinus)

$$\sin(\pi z) = \pi z \cdot \prod_{\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{\nu}\right) \cdot e^{\frac{z}{\nu}}$$

$$= \pi z \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\nu^2}\right)$$

Beweis: Nur noch die zweite Gleichung ist zu zeigen. Diese ergibt sich durch Zusammenfassen der Faktoren zu ν und w.

14.18 Satz

Sei f eine meromorphe Funktion.

Dann gibt es ~~eine~~ ganze Funktion g, h auf $\mathbb{C}$, sodass $f = \frac{g}{h}$

Beweis: Es seien $N = \{(a_n, \mu_n)\}$ die Polstellen von f mit Vielfachheiten.

Sei h eine ganze Funktion mit $\operatorname{div} h = N$.

Dann hat $f \cdot h$ nur hebbare Singularitäten.

Also nach Hebung ist $g = f \cdot h$ eine ganze Funktion und $f = \frac{g}{h}$. $\square$

14.19 Folgerung

Der Körper $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ der meromorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$ ist der Quotientenkörper des Ringes $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ der holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$, indem man $f+g$, $f \cdot g$ zunächst dort definiert, wo beide Funktionen definiert sind, und anschließend über hebbare Singularitäten fortsetzt.
($\frac{1}{f}$ ist zunächst nur dort erklärt, wo f keine Null oder Polstelle)

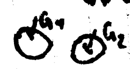
Bezeichnet $\mathcal{O}(G)$ den Ring der holomorphen Funktionen auf G, so ist dies, da G ein Gebiet ist, ein Integritätsring und Quotientenkörper

$$Q(\mathcal{O}(G)) \hookrightarrow \mathcal{M}(G)$$

Im Fall $G = \mathbb{C}$ besagt Satz 14.18, dass Gleichheit gilt. $\square$

d.h. nullteilerfrei

G kein G



$(1,0) \cdot (0,1) = (0,0)$

nicht nullt

Bemerkung: In Wahrheit gilt $Q(\mathcal{O}(G)) = \mathcal{M}(G)$ für beliebige Gebiete $G \subset \mathbb{C}$.

Dies werden wir in dieser Vorlesung nicht zeigen.

15. Elliptische Funktionen

15.1 Definition

Sei f eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$.
Eine komplexe Zahl ω heißt Periode von f,
wenn $f(z+\omega)=f(z)\quad \forall z\in\mathbb{C}$.

Beispiel: 1) $2\pi i$ ist eine Periode von $\exp(z)$

2) Sind w_1 und w_2 Perioden von f, dann ist auch nw_1+mw_2 eine Periode von f $\forall n,m\in\mathbb{Z}$.

15.2 Satz

Die Periode einer nichtkonstanten meromorphen Funktion auf $\mathbb{C}$ bilden eine diskrete Untergruppe Ω von $\mathbb{C}$.

Beweis: Dass die Periode eine Untergruppe von $(\mathbb{C},+)$ bilden, haben wir notiert.

Sie ist diskret, da wenn wir einen Häufungspunkt hätten, f konstant wäre:

In der Tat ist $a=\lim_{k\to\infty} w_k$, w_k Perioden, so folgt für ein z_0, indem f holomorph ist

$$f(z_0)=f(z_0+w_r)=\lim_{n\to\infty} f(z_0+w_r)=f(z_0+a)$$

Die Funktion $g\equiv f(z_0)$ hat also in allen diesen Punkten den gleichen Wert wie f.

Also nach dem Identitätsatz ist f konstant.