There are $r = 6 = \binom{4}{2}$ minors with initial term

$x_1 y_2$	$M_1 = 0$	There are 8 Buchberger tests to do which is less than 15, the number of S-poly
$x_1 y_3$	$M_2 = (y_2)$	
$x_1 y_4$	$M_3 = (y_2, y_3)$	
$x_2 y_3$	$M_4 = (x_1)$	
$x_2 y_4$	$M_5 = (x_1, y_3)$	
$x_3 y_4$	$M_6 = (x_1, x_2)$	

Beweis: Buchbergers Kriterium:

Eine Richtung ist einfach:

Ist $g_1, .., g_r$ eine GB für $I = (g_1, .., g_r)$ und $g \in I$ beliebiges Element, dann ist der Rest $h = 0$, da mit g und $g_1, .., g_r \in I$ auch $h \in I$

$in(h) \notin (in(g_1) .., in(g_r))$ nach Bed (2)(b)

Für die andere Richtung gibt uns das Kriterium für jedes und jeden minimalen Erzeuger m von M_i einen Ausdruck

$$m g_i = \sum_{j=1}^{r} g_j^{(m,i)} g_j$$

Der Vektor $G^{(i,m)} := (-g_1^{(m,i)}, .., m - g_i^{(m,i)}, .. -g_r^{(m,i)})$ liegt im Kern der Abb.

$$P^r \to P, \ (a_1, .., a_r) \mapsto \sum a_i g_i$$

wobei $P = K[x_1, .., x_n]$

Def: Sei R ein Ring und $g_1, .., g_r \in R^s$ Elemente in einem freien R-Modul vom Rang s.

Ein Element $(g_1, .., g_r) \in Ker(R^r \xrightarrow{(g_1, .., g_r)} R^s)$ nennt man eine Syzygie zwischen $g_1, .., g_r$

$Ker(R^r \to R^s)$ heißt Syzygien-Modul

Beispiel: $\left(\frac{in\, g_j}{m}, -\frac{in\, g_i}{m}\right) \in Ker\left(P^2 \xrightarrow{(in\, g_i,\, in\, g_j)} P\right)$ und $m = lcm(in\, g_i, in\, g_j)$ ist eine Syzygie zwischen $in\, g_i$ und $in\, g_j$ und dieser erzeugt den Syzygien-Modul

Also Buchbergers Kriterium gibt Syzygien
$G^{(i,m)} \in \mathrm{Ver}(P^r \to P)$
zwischen $f_1, \dots, f_r$
Sei nun $f \in (f_1, \dots, f_r)$ etwa $f = a_1 f_1 + \dots + a_r f_r$
Wir betrachten $(a_1, \dots, a_r) \in P^r$ und dividieren mit Rest dieses Element nach den $G^{(i,m)}$'s

Def. (Monome und Terme in freien P-Moduln)
Sei $F = P^r = \bigoplus_{k=1}^{r} P e_k$ ein freier P-Modul mit Basis $e_1, \dots, e_r$. Ein Monom in F ist ein Ausdruck $x^\alpha e_j$
Ein Term ein Ausdruck $\lambda x^\alpha e_j$, $\lambda \in K^\times$
Eine Monomordnung „>" auf F ist eine vollständige Ordnung der Monome von F, die

$$x^\alpha e_i > x^\beta e_j \Rightarrow x^\gamma x^\alpha e_i > x^\gamma x^\beta e_j \quad \forall x^\gamma \in P$$

erfüllt. „>" heißt global, wenn

$$x_i e_j > e_j \quad \text{für alle } i, j \in \{1, \dots, r\} \text{ erfüllt ist}$$

Durch „$>_i$" definiert durch

$$x^\alpha >_i x^\beta :\Leftrightarrow x^\alpha e_i > x^\beta e_i$$

werden dann (globale) Monomordnungen auf P definiert
Wenn diese übereinstimmen sagen wir, dass „>" eine Fortsetzung von „$>_i$" = „$>_j$" auf P ist
Ist „>" eine globale Monomordnung auf $F = P^r$, dann ist der Inhalt $\mathrm{in}(f)$ für $f \in F = P^r$ definiert

Beispiel. Sei „>" eine Monomordnung auf P

(1) $x^\alpha e_i > x^\beta e_j$, falls $i > j$ oder $i = j$ und $x^\alpha > x^\beta$.

(2) $x^\alpha e_i > x^\beta e_j$, falls $x^\alpha > x^\beta$ oder $x^\alpha = x^\beta$ und $i > j$

(3) Gewichtsordnung: $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n, \tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_r) \in \mathbb{R}^n_{>0} \times \mathbb{R}^r$

$x^\alpha e_i >_w x^\beta e_j$, falls $\sum_{k=1}^n w_k \alpha_k + \tilde{w}_i > \sum_{k=1}^n w_k \beta_k \tilde{w}_j$

Dies ist eine vollst. globale Ordnung, wenn $w_1, .., w_n, \tilde{w}_1, .., \tilde{w}_r$ $\mathbb{Q}$ linear unabhängig sind.

Für unsere Zwecke ist die induzierte Ordnung (Schreyer Ordnung) auf $F = P^r$ relevant. $f_1, .., f_r \in P$

$x^\alpha e_i > x^\beta e_j$, falls $x^\alpha \mathrm{in}(f_i) > x^\beta \mathrm{in}(f_j)$

oder $x^\alpha \mathrm{in}(f_i) = x^\beta \mathrm{in}(f_j)$ bis auf ein Skalar ($x^\alpha \mathrm{in}(f_i) = \lambda x^\beta \mathrm{in}(f_j)$, $\lambda \in K^\times$)

und $i > j$.

Bzgl. dieser Ordnung gilt $\mathrm{in}(G^{(im)}) = m e_i$

($G^{(im)} = m e_i - \sum g_j^{(im)} e_j$), denn für genau einen Term $m e_i \neq m' e_j$ von $G^{(im)}$ gilt $m\, \mathrm{in}(f_i) = m'\, \mathrm{in}(f_j)$ und dieser erfüllt $i > j$ nach Bedingung 2a) für die $g_j^{(im)}$. Und alle anderen Terme $m'' e_j$ erfüllen $m e_i > m'' e_j$, da $m\, \mathrm{in}(f_i) > m''\, \mathrm{in}(f_j)$

<u>Thm.</u> Division mit Rest für freie P-Module

Sei $>$ eine globale Monomordnung auf $F = P^s = \bigoplus_{k=1}^s P e_k$ auf freiem P-Modul mit Basis $e_1, .., e_s$.

Es seien $f_1, .., f_r \in P^s$. Für jeden weiteren Polynomvektor $f \in P^s$ existieren eindeutig bestimmte $g_1, .., g_r \in P$ und ein eindeutiger Rest $h \in P^s$, sodass

(1) $f = g_1 f_1 + \dots + g_r f_r + h$

(2a) Kein Term von $g_i\, \mathrm{in}(f_i)$ ist ein Vielfaches von $\mathrm{in}(f_j)$ für $j < i$

(2b) Kein Term von h ist ein Vielfaches von einem $\mathrm{in}(f_j)$ für $j = 1, .., r$

Beweis: Übung

Wir beweisen nun Buchbergers Satz

Nach Voraussetzung haben wir Buchbergertest Syzygien
$$G^{(i,m)} \in \mathrm{Ker}\,(P^r \to P) \text{ mit } \mathrm{in}(G^{(i,m)}) = m e_i$$
bzgl. der induzierten Ordnung

Sei $f \in (f_1, .., f_r)$ beliebig. Etwa $f = a_1 f_1 + .. + a_r f_r$, $a_1, .., a_r \in P$.

Wir betrachten den Rest von $a = (a_1, .., a_r) \in P^r$ bei der Division nach den $G^{(i,m)}$'s.

Ist dieser $(g_1, .., g_r)$ dann erfüllen $g_1, .., g_r$ die Bedingung 2a) für die Division nach $f_1, .., f_r$

Dann gilt
$$f = g_1 f_1 + \cdots + g_r f_r = a_1 f_1 + \cdots + a_r f_r$$
da die $G^{(i,m)}$ Syzygien sind.

Die $\mathrm{in}(g_i)\,\mathrm{in}(f_i)$ sind dann wegen 2a) für $g_1, .., g_r$ verschieden. und
$$\mathrm{in}(f) = \max(\mathrm{in}(g_1)\,\mathrm{in}(f_1), .., \mathrm{in}(g_r)\,\mathrm{in}(f_r))$$
$$\in (\mathrm{in}(f_1), .., \mathrm{in}(f_r))$$
$f \in I$ war beliebig, also $\mathrm{in}(I) = (\mathrm{in}(f_1), .., \mathrm{in}(f_r))$ □

Übungsaufgabe:

Formuliere Buchbergers Kriterium für Polynomvektoren $f_1, .., f_r \in P^s$

Korollar (Schreyer, 1980)

Sei $f_1, .., f_r \in P^s$ eine GB von dem von $f_1, .., f_r$ erzeugten Untermodul $I \subset P^s$ und bezeichne $G^{(i,m)}$ die Buchberger Testsyzygien.

Dann erzeugen $G^{(i,m)}$ den Syzygienmodul
$$\mathrm{Ker}\,(P^r \to P^s),\ (g_1, .., g_r) \mapsto g_1 f_1 + .. + g_r f_r$$
und bilden eine GB bzgl der induzierten Ordnung.

Beweis: Sei $(a_1, .., a_r) \in \mathrm{Ker}\,(P^r \to P^s)$ und $(g_1, .., g_r)$ der Rest von $(a_1, .., a_r)$ nach den $G^{(i,m)}$ in irgend einer Reihenfolge

Dann gilt $0 = a_1 S_1 + \dots + a_r S_r = g_1 S_1 + \dots + g_r S_r$, da die $G^{(im)}$ Syzygien sind.
Also $0 = in(0) = \max\{ in(g_i)\, in(S_i) \mid i = 1,\dots,r\}$
da diese paarw. versch. sind, außer sie sind 0
Damit $in(g_1) = 0, \dots, in(g_r) = 0$, also $(g_1, \dots, g_r) = 0$

Beispiel:
$I = (w^2 - xz,\ wx - yz,\ x^2 - wy,\ xy - z^2,\ y^2 - wz)$

$$
\begin{array}{l||cccccc}
\underline{w^2} - xz & -x & y & & -z & & -y^2 + wz \\
\underline{wx} - yz & \underline{w} & -x & & & z & z^2 \\
\underline{x^2} - wy & -z & \underline{w} & & -y & & \\
\underline{xy} - z^2 & & & \underline{w} & \underline{x} & -y & -yz \\
\underline{y^2} - wz & & & -z & -w & \underline{x} & \underline{w^2} \\
\hline\hline
f_1^t \;\Big\|\; \begin{matrix} f_2 \\ f_3^t \end{matrix} & & y & -x & \underline{w} & z & 1 \\
 & -y^2 + wz & z^2 & -wy & yz & -w^2 & x
\end{array}
$$

$$0 \leftarrow P/I \leftarrow P \xleftarrow{f_1} P^5 \xleftarrow{f_2} P^6 \leftarrow P^2 \leftarrow 0$$

<u>Satz</u> (Hilberts Syzygiensatz)
Sei M ein endlich erzeugter $P = K[x_1, \dots, x_n]$ Modul. Dann besitzt M eine endliche freie Auflösung

$$0 \leftarrow M \leftarrow F_0 \leftarrow F_1 \leftarrow \dots \leftarrow F_i \leftarrow 0$$

der Länge $i \le n$, $F_i = P^{b_i}$

<u>Beweis</u> (Schreyer)
Wir betrachten ein Erzeugendensystem $0 \leftarrow M \leftarrow F_0$ von freien Moduln, $F_0 = P^{b_0}$. Wir wählen eine globale Monomordnung und berechnen eine GB von $I = \mathrm{Ker}(F_0 \to M)$
Dies liefert

$$0 \leftarrow M \longleftarrow F_0 \longleftarrow F_1 \leftarrow F_2 \cdots \quad , \text{GB } S_1, \dots, S_r$$
$$F_0 \to I \leftarrow F_1$$

In der Anordnung der $S_1, \dots, S_r$ und später $G^{(im)}$ haben wir Wahlfreiheit.
Ordnen wir die S_i nach der höchsten Potenz in der x_n auftaucht, dann taucht x_n nicht in den Leittermen der $G^{(im)}$ auf.

Nach k-Schritten tauchen die $x_n, \dots, x_{n-k}$ nicht mehr auf und das Verfahren bricht nach n Schritten ab.

<u>Algorithmen</u>

Buchbergers Algorithmus um GB zu berechnen

<u>Input</u>: $f_1, \dots, f_k \in P^s$ endlich viele Polynomvektoren

$I = (f_1, \dots, f_k) \subset P^s$ der erzeugte Untermodul

$>$ globale Monomordnung auf P^s

<u>Output</u>: Eine GB $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_r$ von I.

1. Berechne die Initialterme $\operatorname{in}(f_i)$ von $f_1, \dots, f_k$ und die monomialen Schalen

$M_i = (\operatorname{in}(f_1), \dots, \operatorname{in}(f_{i-1})) : \operatorname{in} f_i$

$= (m \in P \text{ Monome} \mid m \operatorname{in} f_i \in \langle \operatorname{in} f_1, \dots, \operatorname{in} f_{i-1} \rangle)$

2. Für jeden monomialen Erzeuger $m \in M_i$ berechnen wir den Rest h von $m \cdot f_i$ dividiert nach $f_1, \dots, f_k$. Wenn $h \neq 0$, dann $f_{k+1} = h$ und gehen nach 1. zurück

3. Sind alle Reste Null, dann wählen wir unter den $f_1, \dots, f_k, \dots, f_r$ Elemente $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_s$ aus, sodass

$(\operatorname{in} \tilde{f}_1, \dots, \operatorname{in} \tilde{f}_s) = \operatorname{in}(I) = (\operatorname{in} f_1, \dots, \operatorname{in} f_r)$

4. Falls nötig berechne eine Matrix $P \in P^{k \times r}$ in denen wir rekursiv die neuen GB Elemente durch die schon berechneten GB darstellen

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \vdots \\ \tilde{f}_r \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix}$$

Bem: Der Algorithmus ist terminiert, da monomiale Module in (I) endlich erzeugt sind.