Nach k - Schritten tauchen die $x_n, \dots, x_{n-k}$ nicht mehr auf und das Verfahren bricht nach n Schritten ab.

Algorithmen

Buchbergers Algorithmus um GB zu berechnen

Input: $f_1, \dots, f_k \in P^s$ endlich viele Polynomvektoren

$I = (f_1, \dots, f_k) \subset P^s$ der erzeugte Untermodul

$>$ globale Monomordnung auf P^s

Output: Eine GB $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_r$ von I.

1. Berechne die Initialterme $in(f_i)$ von $f_1, \dots, f_k$ und die monomialen Ideale

$M_i = (in(f_1), \dots, in(f_{i-1})) : in\, f_i$

$= (m \in P \text{ Monome} \mid m \; in\, f_i \in \langle in\, f_1, \dots, in\, f_{i-1} \rangle)$

2. Für jeden monomialen Erzeuger $m \in M_i$ berechnen wir den Rest h von $m \cdot f_i$ dividiert nach $f_1, \dots, f_k$. Wenn $h \neq 0$, dann $f_{k+1} = h$ und gehen nach 1. zurück

3. Sind alle Reste Null, dann wählen wir unter den $f_1, \dots, f_k, \dots, f_r$ Elemente $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_s$ aus, sodass

$(in\, \tilde{f}_1, \dots, in\, \tilde{f}_s) = in(I) = (in\, f_1, \dots, in\, f_r)$

4. Falls nötig berechne eine Matrix $P \in P^{k \times r}$ in denen wir rekursiv die neuen GB Elemente durch die schon berechneten GB darstellen

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \vdots \\ \tilde{f}_r \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix}$$

Bem Der Algorithmus ist terminiert, da monomiale Module $in(I)$ endlich erzeugt sind.

Alg (Ideal membership)
Input $f_1, \dots, f_r \in P$ globale Monomordnung, $f \in P$
Output Boolean: $f \in (f_1, \dots, f_r)$? und wenn true
$a_1, \dots, a_r \in P$, sodass $f = a_1 f_1 + \dots + a_r f_r$ gilt

1. Berechne eine GB $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_s$ von $I = (f_1, \dots, f_r)$ und die Transformationsmatrix $T \in P^{s \times r}$

$$T \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{f}_1 \\ \vdots \\ \hat{f}_s \end{pmatrix}$$

2. Berechne den Rest h von f dividiert nach $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_s$
$f = g_1 \hat{f}_1 + \dots + g_s \hat{f}_s + h$
3. If $h \neq 0$ return False else return True und
$(a_1, \dots, a_r) = (g_1, \dots, g_s) T$

Ein ähnlicher Algorithmus gibt es für Untermodule $I \subset P^s$

Alg (Normalform)
Input Erzeuger $f_1, \dots, f_r \in P$ von Ideal I, $f \in P$, $>$
Output $h \in P$, sodass kein Term von h ein Element von $in(I)$ ist und $h \equiv f \mod I$ gilt
1. Berechne GB von I
2. Return h den Rest von f dividiert nach der GB

Bem:
Es seien $m_1, \dots, m_r$ Monome die $in(I)$ minimal erzeugen und $h_1, \dots, h_r$ die Normalformen von m_r modulo I.
Dann heißt

$$f_j = m_j - h_j \in I \quad, j = 1, \dots, r$$ die normierte reduzierte GB von I

Übungsaufgabe: Es seien $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ und $I_{\mathbb{Q}} = (f_1, \dots, f_r) \subset \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$, sowie
$I_p = (f_1, \dots, f_r) \subset \mathbb{F}_p[x_1, \dots, x_n]$

Dann gilt

$$\operatorname{in}(I_{\mathbb{Q}}) \quad \text{und} \quad \operatorname{in}(I_p)$$

haben für alle Primzahlen p bis auf endlich viele die gleiche minimalen Erzeugendensysteme von Monomen.

<u>Algorithmus</u> Syzygien-Modul

<u>Input</u>: $s_1, \dots, s_r \in P^s$ polynomiale Vektoren

<u>Output</u> $G_1, \dots, G_t \in P^r$, die $\operatorname{Ker}\left(\begin{smallmatrix} P^r \to P^s \\ e_i \mapsto s_i \end{smallmatrix}\right)$ erzeugen

1. Wähle globale Monomordnung, z.B. drlex
2. Berechne eine GB

$$s_1, \dots, s_r, s_{r+1}, \dots, s_k$$

zusammen mit den Buchberger-test-Syzygien $G^{(m,i)}$

3. Sortiere die $G^{(m,i)}$, sodass die Testsyz., die eine neue GB produzieren zu erst kommen

Die Matrix mit Spalten $G^{(m,i)}$ hat die Gestalt

$$\begin{array}{c|c|c|} s_1 & & \\ \vdots & A & B \\ s_r & & \\ \hline s_{r+1} & 1 \ \ \ast & \\ \vdots & \ddots & D \\ s_k & 1 & \end{array} =: P$$

$\underbrace{\qquad}_{=:C}$

mit C eine obere Dreiecksmatrix mit 1 auf der Diagonalen

4. Multipliziere P von rechts mit $\left(\begin{array}{c|c} C^{-1} & -C^{-1}D \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$, dann ist

$$\tilde{P} = \left(\begin{array}{c|c} AC^{-1} & B - AC^{-1}D \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right)$$

5. Return $B - AC^{-1}D$, deren Spalten den Kern $\operatorname{Ker}(P^r \xrightarrow{s_1, \dots, s_r} P^s)$ erzeugen

<u>Beweis der Korrektheit</u>:

Eine Syzygie zwischen $s_1, \dots, s_r$ ist eine Syzygie zwischen $s_1, \dots, s_r, \dots, s_k$ etwa letzte $k-r$ Koeff Null. Also die Spalten von $B = AC^{-1}D$ sind Syzygien von $s_1, \dots, s_r$.

Umgekehrt erzeugen die Spalten von $\tilde{P}$ (genauso wie die Spalten von P) den Syzygienmodul nach dem Vorrollen), da
$$\begin{pmatrix} C^{-1} & C^{-1}D \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ invertierbar ist.
Unter diesen sind nur die im Block $\begin{pmatrix} B-AC^{-1}D \\ 0 \end{pmatrix}$, welche $f_{r+1}, \ldots, f_k$ nicht involvieren. □

Alg. Durchschnitt von Idealen

Input $I = (f_1, \ldots, f_r)$, $J = (g_1, \ldots, g_s) \subset P$ zwei Ideale spezifiziert durch Erzeugendensysteme

Output Erzeuger des Ideals $I \cap J$.

1. Bilde die $2 \times (1+r+s)$-Matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & f_1 \cdots f_r & 0 \cdots & 0 \\ 1 & 0 \cdots 0 & g_1 \cdots & g_s \end{pmatrix} =: P_0$$
und berechne die Syzygienmatrix P_1 deren Spalten den Kern
$$\operatorname{Ker}\left(P^{1+r+s} \xrightarrow{P_0} P^2 \right)$$
erzeugen $P_1 = \begin{pmatrix} h_1 \cdots h_t \\ * \end{pmatrix}$ Return $(h_1, \ldots, h_t)$

Beweis der Korrektheit $P_0 P_1 = 0$ besagt, dass $h_i \in I \cap J$ gilt.
Umgekehrt ist $h = a_1 f_1 + \cdots + a_r f_r = b_1 g_1 + \cdots + b_s g_s \in I \cap J$
Dann ist $(h, -a_1, \ldots, -a_r, -b_1, \ldots, -b_s)$ eine Syzygie von P_0
Also $h_1, \ldots, h_t$ erzeugen $I \cap J$, da die Spalten von P_1 $\operatorname{Ker} P_0$ erzeugen.

Algorithmus Eliminationsideale

Input $I = (f_1, \ldots, f_r) \subset K[x_1, \ldots, x_n]$

Output Die Eliminationsideale $I_k = I \cap K[x_{k+1}, \ldots, x_n]$

1. Berechne eine GB bzgl. der lexikographischen Ordnung
2. For $k = 1, \ldots, n$ collect all generators f_j of the GB whose $in(f_j) \in K[x_{k+1}, \ldots, x_n]$
   They generate a GB of I_k

Beweis: Die wesentliche Eigenschaft von $>_{Bx}$ ist
$$in(f) \in K[x_{k+1},..,x_n] \Rightarrow f \in K[x_{k+1},..,x_n]$$
In der Tat ein Term $m \notin K[x_{k+1},..,x_n]$ erfüllt
$m >_{Bx} in(f)$ $\square$

Alg Kern von Substitutionshomomorphismus
Input: $I \subset P = K[x_1,..,x_n]$, $f_1,..,f_m \in P$
Output: GB oder Erzeuger von
$$J = \mathrm{Ker}\left(\begin{array}{ccc} K[Y_1,..,Y_m] & \xrightarrow{\Phi} & K[x_1,..,x_n]/I \\ Y_j & \longmapsto & f_j \end{array} \right)$$

1. Wähle eine Produktordnung $>_{12}$ auf $K[x_1,..,x_n,Y_1,..,Y_m] = \tilde{P}$ und betrachte Ideale
$$I_i = (I\tilde{P} + (Y_i - f_i)) \subset \tilde{P}, \quad \tilde{I} = \sum_{j=1}^{m} I_i$$
Produktordnung $K[x_1,..,x_n, Y_1,..,Y_m]$
$>_1$ eine glob. Monomordnung auf $K[x_1,..,x_n]$
$>_2$ glob Monomordnung auf $K[Y_1,..,Y_m]$
$$X^\alpha Y^\beta >_{12} X^\gamma Y^\delta, \text{ falls } X^\alpha >_1 X^\gamma \text{ oder}$$
$$X^\alpha = X^\gamma \text{ und } Y^\beta >_2 Y^\delta$$

2. Berechne $J = \tilde{I} \cap K[Y_1,..,Y_m]$ wiederum eine GB bezgl $>_{12}$ und die f, die $in(f) \in K[Y_1,..,Y_m]$ einsammeln.
$$f \in K[Y_1,..,Y_m],$$
$$\mathrm{Ker}(\Phi) = J \cap K[Y_1,..,Y_m]$$

22.05.18 Example Consider the map $f: \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2$, $t \mapsto (t^2, t^3)$
The graph of f is the set
$$\{(t, t^2, t^3) \mid t \in \mathbb{A}^1\} \subset \mathbb{A}^3 = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^2$$
and is defined by $I = (Y - X^2, Z - X^3) \subset K[X,Y,Z]$
$K[X,Y,Z]/(Y-X^2, Z-X^3) \cong K[X]$, so I is a prime ideal
To compute the ideal of the image $f(\mathbb{A}^1) \subset \mathbb{A}^2$ we compute a GB with respect to $>_{Bx}$ and $x > y > z$