**Beweis:** Die wesentliche Eigenschaft von $>_{Elx}$ ist
$$in(f) \in K[x_{k+1},\dots,x_n] \Rightarrow f \in K[x_{k+1},\dots,x_n]$$
In der Tat ein Term $m \notin K[x_{k+1},\dots,x_n]$ erfüllt
$m >_{Elx} in(f)$ $\square$

**Alg** Kern von Substitutionshomomorphismus
Input: $I \subset P = K[x_1,\dots,x_n]$, $f_1,\dots,f_m \in P$
Output: GB oder Erzeuger von
$$J = \mathrm{Ker}\left( \begin{array}{ccc} K[Y_1,\dots,Y_m] & \xrightarrow{\Phi} & K[x_1,\dots,x_n]/I \\ Y_j & \longmapsto & f_j \end{array} \right)$$

1. Wähle eine Produktordnung $>_{12}$ auf $K[x_1,\dots,x_n,Y_1,\dots,Y_m] = \tilde{P}$ und betrachte Ideale
$$I_i = (I\tilde{P} + (Y_i - f_i)) \subset \tilde{P}, \quad \tilde{I} = \sum_{j=1}^{m} I_i$$
Produktordnung $K[x_1,\dots,x_n,Y_1,\dots,Y_m]$
$>_1$ eine glob. Monomordnung auf $K[x_1,\dots,x_n]$
$>_2$ glob. Monomordnung auf $K[Y_1,\dots,Y_m]$
$x^\alpha Y^\beta >_{12} x^\gamma Y^\delta$, falls $x^\alpha >_1 x^\gamma$ oder
$x^\alpha = x^\gamma$ und $Y^\beta >_2 Y^\delta$

2. Berechne $J = \tilde{I} \cap K[Y_1,\dots,Y_m]$ wiederum eine GB bzgl. $>_{12}$ und die $f$, die $in(f) \in K[Y_1,\dots,Y_m]$ einsammeln.
$$f \in K[Y_1,\dots,Y_m].$$
$$\mathrm{Ker}(\Phi) = J \cap K[Y_1,\dots,Y_m]$$

22.05.18 **Example** Consider the map $f: \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2$, $t \mapsto (t^2, t^3)$
The graph of $f$ is the set
$$\{(t, t^2, t^3) \mid t \in \mathbb{A}^1\} \subset \mathbb{A}^3 = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^2$$
and is defined by $I = (Y - X^2, Z - X^3) \subset K[X,Y,Z]$
$K[X,Y,Z]/(Y - X^2, Z - X^3) \cong K[X]$, so $I$ is a prime ideal
To compute the ideal of the image $f(\mathbb{A}^1) \subset \mathbb{A}^2$ we compute a GB with respect to $>_{Elx}$ and $x > y > z$

$\varphi: \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2, \quad V(I) \subset \mathbb{A}^3$

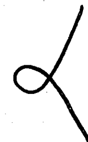
$I_1 = I \cap K[Y,Z] \quad V(I_1) \subset \mathbb{A}^2$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $X^2 - Y$ | $-X$ | $-Y$ | $-Z$ | | |
| $X^3 - Z$ | $1$ | | | | |
| $XY - Z$ | $-1$ | $X$ | $Y$ | $-Z$ | $-Y^2$ |
| $XZ - Y^2$ | | $1$ | $X$ | $Y$ | $Z$ |
| $Y^3 - Z^2$ | | | | $1$ | $X$ |

entries $g_1, \dots, g_r$ of the Buchbergertest

Damit $I_1 = (Y^3 - Z^2)$ 

Neilsche Parabel

 $Y^2 - X^2 + X^3 = 0$

Newtonsche Kurve

Bem: Will man eine Kollektion von Variablen eliminieren, etwa $X_1, \dots, X_n$ für $I \subset K[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m]$, dann ist in der Regel eine Produktordnung

$$X^\alpha Y^\beta >_{12} X^\gamma Y^\delta \iff X^\alpha >_1 X^\gamma \text{ oder } X^\alpha = X^\gamma \text{ und } Y^\beta >_2 Y^\delta$$

Übung: Entwerfen sie einen Algorithmus, der den Durchschnitt $I \cap J$ zweier Untermodule $I, J \subset P^s$ berechnet

Algorithmus: Colon ideals

Input $I = (f_1, \dots, f_r)$, $J = (g_1, \dots, g_s)$ Ideale in $K[X_1, \dots, X_n] = P$

Output $I : J = \{ r \in P \mid rJ \subset I \}$

1. Wir formen die $s \times (r \cdot s + 1)$ Matrix

$$\varphi = \begin{pmatrix} g_1 & f_1 \cdots f_r & & & \\ \vdots & & f_1 \cdots f_r & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ g_s & & & & f_1 \cdots f_r \end{pmatrix}$$

und berechne die Syzygienmatrix $\psi \in P^{(r \cdot s + 1) \times t}$

2. Die Einträge der ersten Zeile von $\psi$ erzeugen $I : J$.

Beweis: In der Tat für $(h, a_1, \dots, a_s)$ Spalte von $\psi$ gilt $h g_i \in (f_1, \dots, f_r)$ für $i = 1, \dots, s$, also $h \cdot J \subset I$.

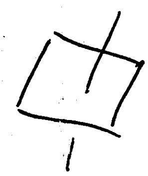
Umgekehrt zu $h \in I:J$ finden wir ein Element $(h, a_1, \dots, a_s) \in \operatorname{Ker}(\varphi)$ und $h$ ist eine Linearkombination der ersten Einträge von $\psi$, da die Spalten $\operatorname{Ker}\varphi$ erzeugen

<u>Beispiel</u> $I = (XZ, YZ)$, $V(I) = V(Z) \cup V(X,Y)$

$J = (Z)$, $I:J = (XZ, YZ):(Z)$

$\varphi = (Z, XZ, YZ)$, $\operatorname{Ker}\varphi = \psi = \begin{pmatrix} X & Y \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$I:J = (X, Y)$



<u>Algorithmus</u> (Saturierung)

<u>Input</u> $I, J \subset K[X_1, \dots, X_n]$

<u>Output</u> $(I:J^\infty) = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} (I:J^N)$

1. Setze $I' = I$
2. while ( $I'' = I':J$ ; $I'' \supsetneq I'$ ) do $I' = I''$
3. Return $I'$.

<u>Beweis</u>:

Da $I \subset (I:J) \subset (I:J^2) \subset \dots \subset (I:J^N) \subset \dots$ ist $I:J^\infty$ ein Ideal und da es endlich erzeugt ist, ist der Algorithmus auch terminiert

<u>Korrektheit</u>: $((I:J):J) = \{r \in P \mid rJ \subset I:J\}$

$= \{r \in P \mid rJ^2 \subset I\} = (I:J^2)$

Allgemeiner $(I:J^N) = (I:J^{N-1}):J$

Der Algorithmus terminiert, wenn $(I:J^{N-1}) = (I:J^N)$

Dann gilt

$$(I:J^{N+1}) = (I:J^N):J \overset{I.V}{=} (I:J^{N-1}):J = I:J^N$$

und allgemein

$(I:J^{N-1}) = (I:J^M)$ $\forall M \geq N$, also mit Schritt 3

$$I' = \bigcup_{M \in \mathbb{N}} I:J^M = I:J^\infty \text{ nach Def.}$$

**Algorithmus:** Zariski Abschluss des Bildes von Varietäten unter rationalen Abb.

**Input:** $I = I(A)$ das Ideal einer Varietät $A \subset \mathbb{A}^n$

$f_1 = \bar{g}_1/\bar{h}_1, \dots, f_m = \bar{g}_m/\bar{h}_m \in K(A)$

spezifiziert durch $g_1,\dots,g_m, h_1,\dots,h_r \in K[X_1,\dots,X_n]$

**Output:** Das Ideal $J \subset K[Y_1,\dots,Y_m]$ welches den Zariski-Abschluss des Bildes $\phi: A \dashrightarrow \mathbb{A}^m$ definiert.

Für $U = A - V(h) \subset \mathbb{A}^n$ für $h = h_1 \cdots h_m$

$f: U \to \mathbb{A}^m$, $a \mapsto \left( g_1(a)/h_1(a), \dots, g_m(a)/h_m(a) \right)$

ist $B = \overline{f(U)} \subset \mathbb{A}^m$

1. Betrachte $K[Z, X_1,\dots,X_n, Y_1,\dots,Y_m] = \tilde{P}$
   und das Ideal
   $$\tilde{J} = I \cdot \tilde{P} + (hZ-1) + (h_i Y_i - g_i \mid i=1,\dots,m)$$
2. Berechne eine GB bzgl. Produktordnung $>_{12}$ von
   $>_1$ glob. Monomordnung auf $K[Z, X_1,\dots,X_n]$
   $>_2$ glob. Monomordnung auf $K[Y_1,\dots,Y_m]$
3. Sammel die GB Elemente mit $\mathrm{in}_{>_{12}} f \in K[Y_1,\dots,Y_m]$ ein und gebe das von diesen Elementen erzeugte Ideal aus

**Beispiel:**

$A = V(X^2+Y^2-1) \subset \mathbb{A}^2$ ein Kegelschnitt

$(f_1, f_2) = (1/X_1, 1/X_2)$

$\tilde{J} = (X_1^2 + X_2^2 - 1,\ ZX_1X_2 - 1,\ X_1Y_1 - 1,\ X_2Y_2 - 1)$

Rechnung $J = (Y_1^2 Y_2^2 - Y_1^2 - Y_2^2)$

$B = V(J) \xrightarrow[(1/Y_1,\, 1/Y_2)]{} \mathbb{A}^2$

**Bem:** $B(\mathbb{R})$ enthält $(0,0)$ als einen isolierten Punkt

$\|(Y_1, Y_2)\|_2 \le r$, also $\|Y_1\|_2, \|Y_2\|_2 \le r$

$\|Y_1^2 Y_2^2\| \le r^4$ für Punkte $(Y_1, Y_2)$

$0 < r \ll 1$ so $r^4 < r^2$

**Satz** (Unmixedness thm of Macaulay) 1.6 Version

Sei $I \subset K[x_1,.., x_n]=P$ und $g_1,.., g_r$ eine GB von $I$ bzgl. einer globalen Monomordnung

Angenommen

(a) $\mathrm{in}(g_1),.., \mathrm{in}(g_r) \in K[x_1,.., x_c]$

(b) $K[x_1,.., x_c]/(\mathrm{in}\, g_1,.., \mathrm{in}\, g_r)$ ist ein endlich dimensionaler K-VR

Dann gilt:

(1) $K[x_1,.., x_n]/I$ ist ein freier, endl. erzeugter $K[x_{c+1},.., x_n]$-Modul mit Basis in $K[x_1,.., x_c]-I$

(2) Jede Komponente in $V(I)$ hat die Dimension $n-c$

(3) Die Projektion $\pi: \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^{n-c}$ auf die letzten Koordinaten induziert eine endl. surj. Abb

$$\pi: V(I) \to \mathbb{A}^{n-c}$$

(4) $P/I$ hat eine freie Auflösung

$$0 \leftarrow P/I \leftarrow P \leftarrow F_1 \leftarrow .. \leftarrow F_c \leftarrow 0$$

der Länge c

**Beweis:** (4) Folgt mit unserer Konstruktion der freien Auflösg. Länge $\leq c$ ist für die Konstr. leicht zu sehen.

(1) Nach Macaulays Satz bilden die $m \notin \mathrm{in}(I)$ eine K-VR Basis von $P/I$. Wegen (a) und (b) ist

$$P/I = (\text{K-VR erzeugt v. den } m \notin \mathrm{in}\, I)$$

$$= \bigoplus_{j=1}^{d} K[x_{c+1},.., x_n] m_j,$$

wobei $m_1,.., m_d \in K[x_1,.., x_n] - \mathrm{in}(I)$ eine Basis als K-VR von $K[x_1 .. x_c]/(\mathrm{in}\, g_1,.., \mathrm{in}\, g_r)$ bilden

Also $K[x_1,.., x_n]/I$ ist als $K[x_{c+1},.., x_n]$-Modul frei mit Basis $m_1, .., m_d$

(3) Wir zeigen, dass für die Projektion

$\mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^{n-c}$ nach (1)

$V(I) \mapsto V(I_c)$

die Voraussetzungen des iterierten Projektionssatz erfüllt sind.
Zu $x_e$ mit $e \in \{c+1, \dots, n\}$ können wir nach (1) die Produkte

$$x_e m_i \equiv \sum_{j=1}^{d} g_{ij}^{(e)} m_j \mod I,$$

wobei $g_{ij}^{(e)} \in K[x_{c+1}, \dots, x_n]$ schreiben.
Damit $f_e = \det(x_e E_d - (g_{ij}^{(e)})) \in I$ ein in $x_e$ normiertes Polynom in $K[x_e, x_{c+1}, \dots, x_n]$ ist.
Es folgt

$$V(I) \to \mathbb{A}^{n-c}$$

ist surjektiv und endlich, da $I_c = (0)$

(2) Sei $V(I) = C_1 \cup \dots \cup C_t \subset \mathbb{A}^n(\bar{K})$ die Zerlegung von $V(I)$ in irreduzible Komponenten und

$$\operatorname{rad}(I) = \mathfrak{P}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{P}_t$$

die entsprechende Zerlegung des Radikalideals in Primideale in $\bar{K}[x_1, \dots, x_n] = \bar{P}$.
Eigenschaft bleibt richtig, $\bar{P}/I\bar{P}$ ist freis $\bar{K}[x_{c+1}, \dots, x_n]$-Modul.
Angenommen $C_1 = V(\mathfrak{P}_1)$ hat Dimension kleiner $n-c$
Dann ist $\pi(C_1) \subsetneq \mathbb{A}^{n-c}$ und sei $f \in \bar{K}[x_{c+1}, \dots, x_n]$-ein Element in $\mathfrak{P}_1$
Sei $g \in \mathfrak{P}_2 \cap \dots \cap \mathfrak{P}_t - \mathfrak{P}_1$
Da $\mathfrak{P}_1 \not\supset \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_t$ gibt es ein $g$ im Durchschnitt
Dann gilt $fg \in \mathfrak{P}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{P}_t = \operatorname{rad}(I\bar{P})$, also ex $N \in \mathbb{N}$ mit $(fg)^N \in I\bar{P}$
Wegen $g \notin \mathfrak{P}_1$ gilt $g^N \notin \mathfrak{P}_1$. Also $g^N \in \bar{P}/I\bar{P}$ repräsentiert ein von Null verschiedenes Element und

$$f^N g^N = 0 \in \bar{P}/I\bar{P}$$

$f \in \bar{K}[x_{c+1}, \dots, x_n]$. Dies Widerspr. der Voraussetzg (a) und (b) da $\bar{P}/I\bar{P}$ ein freier $\bar{K}[x_{c+1}, \dots, x_n]$-Modul ist