25.05.18

§ 3 Lokale Eigenschaften

Der Tangentialraum von C^∞-Mannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^n$ oder komplexen Mannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{C}^n$ ist definiert durch partielle Ableitungen.

Die partielle Ableitung eines Monoms

$$X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$$

kann formal definiert werden als

$$\frac{\partial X^\alpha}{\partial X_i} = \alpha_i X_1^{\alpha_1} \cdots X_{i-1}^{\alpha_{i-1}} X_i^{\alpha_i - 1} X_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \cdots X_n^{\alpha_n}$$

3.1 Def. Sei $f \in K[X_1, \dots, X_n]$. Die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial X_i}$ ist definiert als der Wert von f unter der Abb

$$\frac{\partial}{\partial X_i} : K[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow K[X_1, \dots, X_n]$$

definiert wie oben für Monome (+ lin. Fortsetzung)

Der Gradient von f ist der polynomielle Vektor

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial X_n} \right) \in K[X_1, \dots, X_n]^n$$

Prop: $f, g \in K[X_1, \dots, X_n]$. Dann gilt

(1) $\operatorname{grad}(f+g) = \operatorname{grad}(f) + \operatorname{grad}(g)$

(2) $\operatorname{grad}(f \cdot g) = g \operatorname{grad}(f) + f \operatorname{grad}(g)$

(3a) Falls $\operatorname{char}(K) = 0$, dann
$\operatorname{grad}(f) = 0$ gdw $f \in K \subset K[X_1, \dots, X_n]$

(b) Falls $\operatorname{char}(K) = p > 0$, dann
$\operatorname{grad}(f) = 0$ gdw $f \in K[X_1^p, \dots, X_n^p] \subset K[X_1, \dots, X_n]$

Beweis: (1) klar (2) Produktregel $\frac{\partial (f \cdot g)}{\partial X_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i} g + f \frac{\partial g}{\partial X_i}$

(3a) klar

(3b) Ein Monom $X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$ hat verschwindenden Gradienten genau dann, wenn α_i ein Vielfaches von p ist äq zu RS

Übung 7.1: Sei R eine K-Algebra

Eine K-Derivation ∂ ist eine K-lineare Abb $\partial : R \to R$, die der Produktregel

$$\partial(f \cdot g) = f(\partial g) + (\partial f) \cdot g$$

genügt.

Die Menge

$$\mathrm{Der}_K(R) = \{ \partial : R \to R \mid \partial \text{ ist eine Derivation} \}$$

ist ein R-Modul bzgl. $(h \cdot \partial)(f) = h \cdot \partial(f)$

Beweisen Sie:

(1) Für $R = K[x_1, .., x_n]$ ist $\mathrm{Der}_K(R)$ ein freier R-Modul mit Basis $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n$.

(2) Falls R ein Integritätsring ist, dann gilt: Alle $\partial \in \mathrm{Der}_K(R)$ besitzen eine eindeutige Fortsetzung $\partial \in \mathrm{Der}_K(Q(R))$ und diese genügen

$$\partial\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f\partial g - (\partial f) g}{g^2} \qquad //$$

Der Satz über implizite Funktionen besagt in seiner einfachsten Form:

Für ein Polynom $f \in \mathbb{C}[x, y]$ und ein Punkt $(a, b) \in V(f)$, sodass $\partial f/\partial y\,(a,b) \neq 0$ existieren Umgebungen

$$U = B_\delta(a) \subset \mathbb{C} \quad \text{und} \quad V = B_\varepsilon(b) \subset \mathbb{C}$$

und eine hol Abb $g : U \to V$ mit $g(a) = b$, sodass

$$V(f) \cap (U \times V) \subset \mathbb{C}^2 = \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$$

$$\overset{\shortparallel}{\{(x, y) \in U \times V \mid y = g(x)\}}$$

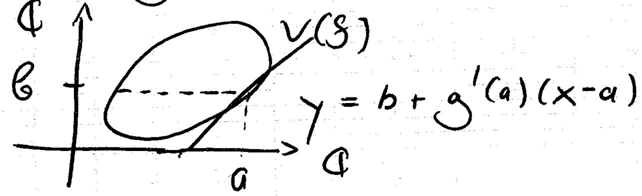
Insbesondere $f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in U$.

Außerdem gilt für die Ableitung $g'(a) = \dfrac{-\partial f/\partial x\,(a,b)}{\partial f/\partial y\,(a,b)}$

und deshalb definiert die lineare Gl.

$$\partial f/\partial x\,(a,b)\,(x-a) + \partial f/\partial y\,(a,b)\,(y-b) = 0$$

die Tangenten von $V(f)$



Bem: Im allgemeinen ist g kein Polynom, da sonst $V(Y - g(X))$ eine Komponente von $V(f)$ ist.

Nichtsdestotrotz der Tangentialraum ist wohldefiniert.

Def: Sei $A \subset \mathbb{A}^n$ eine Hyperfläche$/K$ und sei $I(A) = (f)$ das Verschwindungsideal, $p \in A$, $p = (p_1, .., p_n)$

Wir definieren

$$d_p f = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)(X_1 - p_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)(X_n - p_n).$$

und den Tangentialraum $T_p(A) = V(d_p f) \subset \mathbb{A}^n$ wobei wir $T_p(A)$ als einen UVR $\mathbb{A}^{n(-1)}$ mit Ursprung in p auffassen.

Falls $\operatorname{grad} f(p) \neq 0$, dann ist

$$\mathbb{A}^{n-1} \cong T_p A \subset T_p(\mathbb{A}^n) = \mathbb{A}^n$$

eine Hyperebene.

Im Fall $K = \mathbb{C}$ hat die Projektion

$$V(f) \to \mathbb{A}^{n-1}, \quad p \mapsto (p_1, .., \hat{p_i}, .., p_n)$$

ein lokales Inverses, falls $\partial f / \partial x_i (p) \neq 0$

Gilt das für alle i, so hat

$$T_p(A) \to \mathbb{A}^{n-1}$$

ein lokales Inverses mit $\partial f / \partial x_i (p) \neq 0$ hat

Falls $\operatorname{grad} f(p) = 0$, dann

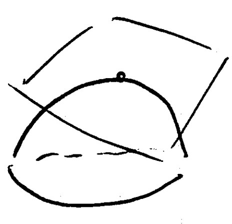
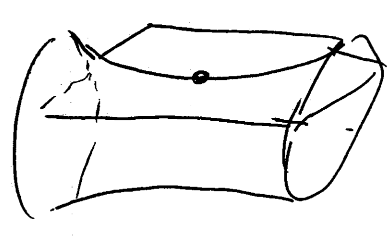
$$T_p(A) = T_p \mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n$$

Def: Sei $A \subset \mathbb{A}^n$ eine Hyperfläche, $(f) = I(A)$

Dann ist $\operatorname{Sing} A = \operatorname{Sing} f = V(f, \partial f/\partial x_1, .., \partial f/\partial x_n)$ der <u>singuläre</u> <u>Ort</u> von A/f

Falls $K = \mathbb{C}$, dann ist $V(f)$ in den Punkten von $V(f) \setminus \operatorname{Sing}(f)$ lokal eine hol Mannigfaltigkeit

Man nennt $p \in V(f) \setminus \operatorname{Sing}(f)$ einen <u>glatten</u> Punkt von $V(f)$ und $A = V(f)$ <u>glatt</u> in p

Prop: Sei $A \subset \mathbb{A}^n$ eine Hyperfläche, $\mathcal{I}(A) = (f) \subset \overline{K}[X_1,\dots,X_n]$.
Dann gilt
$$\mathrm{Sing}(f) \subsetneq V(f)$$

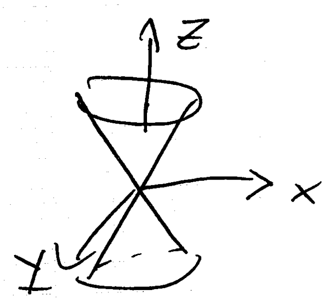
Beweis: Angenommen $\mathrm{Sing}(f) = V(f)$.
Dann gilt $\partial f/\partial x_1, \dots, \partial f/\partial x_n \in \mathrm{rad}(f) = (f)$
Aber $\partial f/\partial x_i$ hat echt kleineren Grad in X_i als f.
Damit $\partial f/\partial x_i = 0 \in \overline{K}[x_1,\dots,x_n]$

1. Fall: $\mathrm{char}\, K = 0$:
Also $f \in K \subset K[x_1,\dots,x_n]$ ist eine Einheit oder 0.
Somit $A = \emptyset$ oder $A = \mathbb{A}^n$. Widerspr zu A Hyperfl.

2. Fall: $\mathrm{char}\, K = p > 0$
$f \in \overline{K}[x_1^p,\dots,x_n^p]$. Sei $f = \sum f_\alpha x_1^{p\alpha_1} \cdots x_n^{p\alpha_n}$
Da $\overline{K}$ alg abgeschl. ist ex $h_\alpha \in \overline{K}$ mit $h_\alpha^p = f_\alpha$.
Dann gilt für $h = \sum h_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$:
$h^p = f$. Ein Widerspr zu $(f) = \mathrm{rad}(f)$ □

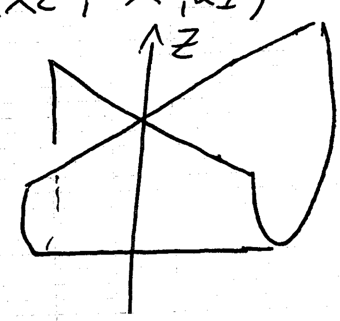
Insbesondere wenn $\overline{K} = \mathbb{C}$, dann sind die „meisten" Punkte von $A = V(f)$ glatt

Bsp: (1) $A = V(\underbrace{X^2+Y^2-Z^2}_{=f})$
$V(f, 2X, 2Y, -2Z) = \{0\}$



(2) $A = V(Y^2 - X^2 Z)$

$\mathrm{Sing}\, A = V(Y^2 - X^2 Z, -2XZ, -X^2, 2Y)$
$= V(X, Y)$

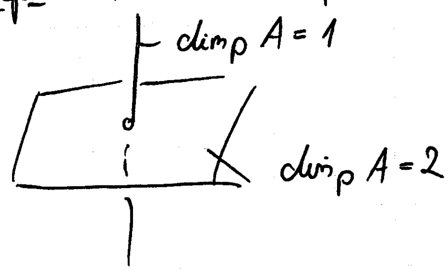


Whitney-Umbrella

Sei nun $A \subset \mathbb{A}^n$ eine bel. alg. Menge, $I = \mathcal{I}(A) \subset \overline{K}[X_1,\dots,X_n]$ das Verschwindungsideal und $p \in A$

Def: Wir definieren die lokale Dimension von A in p
$\dim_p A = \max\{\dim C \mid C \subset A$ eine irred. Komp mit $p \in C\}$
und den Tangentialraum von A in p
$T_p A = V(d_p f \mid f \in I) \subset \mathbb{A}^n$

Bsp: $A = V(XZ, YZ) = V(Z) \cup V(X,Y)$



Die lokale Dimension von $p \in V(Z)$ ist 2, wobei die lok. Dim von A in $p \in V(X,Y) - \{0\}$ 1 ist

Der Tangentialraum ist $T_p A = V(X,Y)$ für $p \in V(X,Y) - \{0\}$ und $T_p(A) = V(Z)$ für $p \in V(Z) - \{0\}$

Im Punkt $p = 0$ gilt:

$$\mathrm{grad}(XZ)(p) = \mathrm{grad}(YZ)(p) = 0$$

und $T_0 A = \mathbb{A}^3$

Bem: $\dim T_p A \geq \dim_p A$ gilt für jedes $p \in A$ (Beweis später)

Def: Wir nennen $p \in A$ einen glatten Punkt, falls $\dim T_p A = \dim_p A$ und singulären Punkt sonst.

Thm: (Jacobi-Kriterium)
Sei $A \subset \mathbb{A}^n$ eine alg. Menge, $p \in A$ und $f_1, \dots, f_r \in I(A)$. Dann gilt

$$n - \mathrm{rank}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right) \geq \dim_p A$$

Wenn Gleichheit gilt, ist A glatt in p.

29.05.18 **Beweis:** Dies folgt aus der Ungleichungskette

$$n - \mathrm{rank}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right) \geq \dim T_p A \geq \dim_p A$$

□

Cor: Sei $I = (f_1, \dots, f_r) \subset K[x_1, \dots, x_n]$ ein Ideal, sodass $A = V(I) \subset \mathbb{A}^n$ equidimensional von der Dimension d ist.

Es bezeichne $I_{n-d}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) \subset K[x_1, \dots, x_n]$ das Ideal, welches von den $(n-d) \times (n-d)$ Minoren der Jacobi-Matrix erzeugt wird.

Gilt $I_{n-d}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) + I = (1)$, dann ist A glatt und

Bew: Die Menge

$$V\left(I_{n-d}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) + I\right) = \emptyset$$