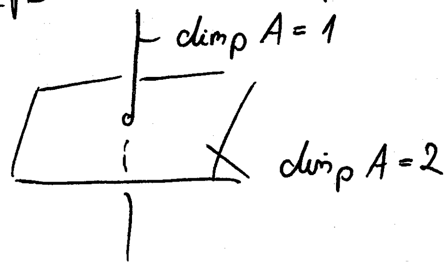
**Bsp:** $A = V(XZ, YZ) = V(Z) \cup V(X,Y)$




Die lokale Dimension von $p \in V(Z)$ ist 2, wobei die lok. Dim von $A$ in $p \in V(X,Y) - \{0\}$ 1 ist

Der Tangentialraum ist $T_p A = V(X,Y)$ für $p \in V(X,Y) - \{0\}$ und $T_p(A) = V(Z)$ für $p \in V(Z) - \{0\}$

Im Punkt $p = 0$ gilt:

$$\operatorname{grad}(XZ)(p) = \operatorname{grad}(YZ)(p) = 0$$

und $T_0 A = \mathbb{A}^3$

**Bem:** $\dim T_p A \geq \dim_p A$ gilt für jedes $p \in A$ (Beweis später)

**Def:** Wir nennen $p \in A$ einen <u>glatten</u> Punkt, falls $\dim T_p A = \dim_p A$ und <u>singulären</u> Punkt sonst.

**Thm:** (Jacobi - Kriterium)
Sei $A \subset \mathbb{A}^n$ eine alg. Menge, $p \in A$ und $f_1, \ldots, f_r \in I(A)$. Dann gilt

$$n - \operatorname{rank}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(p)\right) \geq \dim_p A$$

Wenn Gleichheit gilt, ist $A$ glatt in $p$.

29.05.18 **Beweis:** Dies folgt aus der Ungleichungskette

$$n - \operatorname{rank}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right) \geq \dim T_p A \geq \dim_p A \qquad \square$$

**Cor:** Sei $I = (f_1, \ldots, f_r) \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ ein Ideal, sodass $A = V(I) \subset \mathbb{A}^n$ equidimensional von der Dimension $d$ ist.
Es bezeichne $I_{n-d}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ das Ideal, welches von den $(n-d) \times (n-d)$ Minoren der Jacobi-Matrix erzeugt wird.
Gilt $I_{n-d}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) + I = (1)$, dann ist $A$ glatt und

**Bew:** Die Menge

$$V\left(I_{n-d}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) + I\right) = \emptyset$$

nach dem Hilbertschen Nullstellensatz.
Da jede Komponente von $A$ Dimension $d$ hat zeigt das Jacobi-Kriterium, dass $A$ glatt ist.
Die letzte Aussage zeigen wir später. □

Wir hatten den Tangentialraum $T_p A$ in einem Punkt $p = (a_1, \ldots, a_n)$ in $A \subset \mathbb{A}^n$ als $\overline{K}$-Untervektorraum von $T_p \mathbb{A}^n$ $(= \mathbb{A}^n)$ definiert, wobei wir $T_p \mathbb{A}^n$ als einen $\overline{K}$-Vektorraum mit Nullpunkt $p$ auffassen.
In dieser Definition hängt $T_p A$ von der Einbettung $A \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ ab.
Im folgenden wollen wir eine intrinsische Definition geben, die nur von $\overline{K}[A]$ abhängt.
Wir betrachten die $\overline{K}$-lineare surjektive Abbildung

$$\overline{K}[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\overline{K}}(T_p A, \overline{K}), \quad f \longmapsto d_p f|_{T_p A}$$

Dies macht Sinn, da

$$d_p f = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n)$$

eine Linearform auf $T_p \mathbb{A}^n$ und $T_p A \subset T_p \mathbb{A}^n$ ein $\overline{K}$-UVR ist.
Ferner faktorisiert diese Abbildung über $\overline{K}[A] = \overline{K}[x_1, \ldots, x_n]/I(A)$ da $T_p A$ als Verschwindungsmenge von $(d_p f,\ f \in I(A))$ definiert ist.
Sei $I_A(p) = \{ f \in K[A] \mid f(p) = 0 \} \subset \overline{K}[A]$ das zu $p \in A$ gehörende maximale Ideal. Es gilt

$$K[A]/I_p(A) \cong \overline{K},$$

da wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \to I_A(p) \to \overline{K}[A] \xrightarrow{ev_p} \overline{K} \to 0$$
$$f \longmapsto f(p)$$

haben.
$I_A(p)/I_A(p)^2$ ist ein $\overline{K}[A]/I_A(p)$ Modul, also ein $\overline{K}$-VR

<u>Satz</u> (Zariski-Tangentialraum, erste Version) $p \in A \subset \mathbb{A}^n$ und Notation wie oben. Dann sind die $\overline{K}$-Vektorräume

$$I_A(p)/I_A(p)^2 \xrightarrow{\ \cong\ } \mathrm{Hom}_{\overline{K}}(T_p A, K)$$

isomorph.

Beweis: Da $d_p$ auf konstanten Funktionen verschwindet ist auch die Abbildung

$$I_A(p) \xrightarrow{\ell} \mathrm{Hom}_{\bar{K}}(T_p A, \bar{K})$$

surjektiv.

Bleibt zu zeigen, dass $\mathrm{Ker}\, \ell = I_A(p)^2$ gilt.

Sei $\bar{g} \in I_A(p)$ ein Element in $\mathrm{Ker}\, \ell$ und $g \in \bar{K}[x_1, .., x_n]$ ein Repräsentant.

Die Taylorentwicklung von $g$ in $p$ hat die Gestalt

$$g = \frac{\partial g}{\partial x_1}(p)(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_n}(p)(x_n - a_n) + g_2$$

wobei $g_2 \in (x_1 - a_1, .., x_n - a_n)^2$, da $g(p) = 0$

$d_p\, g|T_pA = 0$ bedeutet, dass ein $f \in I(A)$ existiert mit $d_p g = d_p f$.

Also $g - f \in (x_1 - a_1, .., x_n - a_n)^2$. Damit $\bar{g} \in (\overline{x_1 - a_1}, .., \overline{x_n - a_n})^2 \subset K[A]$

$$\overset{\shortparallel}{I_A(p)^2}$$

$\square$

Also als intrinsische Definition können wir

$$T_p^* A = I_p(A)/I_p(A)^2 \quad \text{und} \quad T_p A = \mathrm{Hom}_{\bar{K}}(T_p^* A, \bar{K})$$

nehmen.

Sei $f: A \to B$ ein Morphismus zwischen algebraischen Mengen, $p \in A$, $q = f(p) \in B$.

Dann gibt es die Tangentialabb. $d_p f: T_p A \to T_q B$.

In der Tat lässt sich diese leicht definieren.

$$f^*: \bar{K}[B] \to \bar{K}[A], \quad g \mapsto g \circ f$$

Diese induziert Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} I_B(q) & \longrightarrow & I_A(p) \\ \cup & & \cup \\ I_B(q)^2 & \longrightarrow & I_A(p)^2 \end{array}$$

Also eine $\bar{K}$-lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc} I_B(q)/I_B(q)^2 & \longrightarrow & I_A(p)/I_A(p)^2 \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ T_q^* B & \longrightarrow & T_p^* A \end{array}$$

Die duale Abbildung ist $T_q B \leftarrow T_p A$ und $d_p f$.

Bem: Sind $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$ zwei Morphismen, dann gilt

$$d_p(\psi \circ \varphi) = (d_{\varphi(p)}\psi) \circ d_p\varphi$$

Im Fall $C = \mathbb{A}^1$ und $\varphi = (f_1, .., f_n)$, $\psi$ gegeben durch $g \in \bar{K}[Y_1, .., Y_n]$ besagt dies

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(g(f_1, .., f_n))\right)(p) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial Y_j}(\varphi(p)) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)$$

die Kettenregel.

## Lokalization

Ist $A$ eine Varietät und $p \in A$ ein Punkt, dann können wir den lokalen Ring

$$\mathcal{O}_{A,p} = \{ f \in \bar{K}(A) \mid \text{es ex } f, g \in \bar{K}[A] \text{ mit } f = g/h \text{ und } h(p) \neq 0 \}$$

Dies ist ein Unterring von $\bar{K}(A)$ genauer $\bar{K}[A] \subset \mathcal{O}_{A,p} \subset \bar{K}(A)$

Für beliebige algebraische Mengen $A$ ist $K[A]$ kein Integritätsring, also der lokale Ring so nicht definiert. Glücklicher Weise ist Bruchrechnung in einem viel allgemeineren Kontext möglich.

**Def:**

Sei $R$ ein Ring (kommutativ mit 1). Eine multiplikative Teilmenge $U \subset R$ ist eine Teilmenge, die

(1) $1 \in U$

(2) $s, t \in U \Rightarrow s \cdot t \in U$

erfüllt.

Beispiele für multiplikative Teilmengen sind

(a) $U = R - \mathfrak{P}$, $\mathfrak{P} \subset R$ ein Primideal

(b) Zu $f \in R$, $U = \{ f^n \mid n \in \mathbb{N} \}$

Wir gehen nun von $R$ zu einem Ring $R[U^{-1}]$ von $R$ über, in dem die Elemente aus $U$ zu Einheiten werden:

Auf $R \times U$ betrachte die folgende Äquivalenzrelation

$$(a, s) \sim (a', s') :\Leftrightarrow \exists\, t \in U : t(s'a - sa') = 0 \in R$$

Der Zusatzfaktor $t$ ist notwendig, wenn $R$ kein Integritätsring ist, um die Transitivität von $\sim$ zu garantieren.

$$(a,s) \sim (a',s') \sim (a'',s''),$$

d.h. es ex $t, t' \in U$ mit

$$t(s'a - sa') = 0, \quad t'(s''a' - s'a'') = 0$$

Die erste Gleichung mult wir mit $t's'' \in U$, die zweite mit $ts$ und Addition liefert

$$0 = t's''ts'a - tst's'a'' = \underbrace{t'ts'}_{\in U}(s''a - sa'')$$

Es bezeichne $a/s$ die Äquivalenzklasse $(a,s)$ und

$R[U^{-1}] = R \times U/\sim$

Addition und Multiplikation werden wie üblich repräsentantenweise definiert.

$$a/s + a'/s' = \frac{s'a + sa'}{ss'}$$

$$a/s \cdot a'/s' = \frac{a a'}{s \cdot s'}$$

Das macht $R[U^{-1}]$ zu einem Ring und

$$i: R \to R[U^{-1}], \quad r \mapsto r/1$$

zu einem Ringhomomorphismus

Def: $R_{\mathfrak{p}} = R[U^{-1}]$ für $U = R - \mathfrak{p}$ das Komplement eines Primideals

und

$R_s = R[U^{-1}] = R[s^{-1}]$ für $U = \{s^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

heißt die Lokalisation von $R$ in $\mathfrak{p}$ bzw $s$.

Beispiel $R = \mathbb{Z}$, $p$ Primzahl, $d \in \mathbb{N}$, $p \nmid d$.

$$\mathbb{Z} - \{0\} \supset U_1 = \mathbb{Z} - (p) \supset U_2 = \{d^n\} \supset \{1\}$$

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_d = \{a/b \mid b = d^n\} \subset \mathbb{Z}_{(p)} = \{a/b \mid p \nmid b\} \subset \mathbb{Q}$$

Satz: (Universelle Eigenschaft von $R[U^{-1}]$) $\varphi: R \to S$ ein Ringhom., Sei $U \subset R$ multiplikativ, sodass $\varphi(U) \subset S$ aus Einheiten besteht

Dann gibt es genau einen Ringhom $\Phi: R[\mathcal{U}^{-1}] \to S$, sodass

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "i"'] & S \\ & R[\mathcal{U}^{-1}] \arrow[u, dashed, "\exists!\,\phi"'] \end{tikzcd}$$

nämlich $\Phi(a/s) = f(a) \cdot f(s)^{-1}$

Bem: Die Abbildung $i: R \to R[\mathcal{U}^{-1}]$ ist i.a. nicht injektiv.
Zum Beispiel $0 \in \mathcal{U}$, dann $R[\mathcal{U}^{-1}] = 0$ der Nullring