Dann gibt es genau einen Ringhom $\Phi : R[U^{-1}] \to S$, sodass nämlich $\Phi(a/s) = f(a) \cdot f(s)^{-1}$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "i"'] & S \\ & R[U^{-1}] \arrow[u, dashed, "\exists ! \phi"'] \end{tikzcd}$$

<u>Bem</u>: Die Abbildung $i : R \to R[U^{-1}]$ ist i.a. nicht injektiv. Zum Beispiel $0 \in U$, dann $R[U^{-1}] = 0$ der Nullring

01.06.18 <u>Beispiele</u>

(1) Sei $\mathfrak{Q} \subset R$ Primideal, $U = R - \mathfrak{Q}$, $R_{\mathfrak{Q}} = R[U^{-1}]$ heißt die Lokalization für R in $\mathfrak{Q}$.

(2) $s \in R$, $U = \{s^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $R_s = R[U^{-1}] = R[s^{-1}]$ heißt Lokalization von R in s.

Der nächste Satz sagt, dass die Idealtheorie von $R[U^{-1}]$ eine simplifizierte Version der Idealtheorie von R ist

<u>Thm</u>: $U \subset R$ multiplikativ $i : R \to R[U^{-1}]$, $r \mapsto r/1$ die natürliche Abbildung. Dann gilt:

(1) Für $I \subset R$ ein Ideal gilt

$$i^{-1}(I R[U^{-1}]) = \{a \in R \mid \exists s \in U : sa \in I\}$$

(2) Für $J \subset R[U^{-1}]$ ist

$$i^{-1}(J) R[U^{-1}] = J$$

(3) Insbesondere gibt die Abbildung $J \mapsto i^{-1}(J)$ eine injektive Abbildung von der Menge der Ideale von $R[U^{-1}]$ in die Menge der Ideale von R. und $R[U^{-1}]$ ist noethersch, wenn R noethersch is

(4) Die Abbildung $J \mapsto i^{-1}(J)$ schränkt sich auf eine Bijektion zwischen der Menge der Primideale von $R[U^{-1}]$ und der Menge der Primideale $\mathfrak{Q} \subset R$ mit $\mathfrak{Q} \cap U = \emptyset$

<u>Beweis</u>:

(1) $a \in i^{-1}(I R[U^{-1}]) \iff a/1 \in I R[U^{-1}] \iff \exists s \in U : sa \in I$

(2) Sei $b/s \in J \iff b/1 \in J$, da $\frac{1}{s} \in R[U^{-1}]$ eine Einheit ist

$\iff b \in i^{-1}(J)$

$\iff b/s \in i^{-1}(J) \cdot R[U^{-1}]$, da $\frac{1}{s}$ eine Einheit in $R[U^{-1}]$ ist

(3) (2) zeigt injektiv

$\mathfrak{I}_1 \subset \mathfrak{I}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{I}_n \dots$

Dann wird

$i^{-1}(\mathfrak{I}_1) \subset \dots \subset i^{-1}(\mathfrak{I}_n) \subset \dots$

stationär, da R noethersch ist, etw $i^{-1}(\mathfrak{I}_n) = i^{-1}(\mathfrak{I}_{n+1})$ usw

Mit (2) gilt $\mathfrak{I}_n = \mathfrak{I}_{n+1} = \dots$ wird ebenfalls stationär.

(4) Ist $\mathfrak{q} \subset R[U^{-1}]$ ein Primideal, dann ist
$i^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$ ebenfalls ein Primideal mit $\mathfrak{p} \cap U = \emptyset$,
da $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} R[U^{-1}]$ keine Einheit enthält

Umgekehrt, ist $\mathfrak{p} \subset R$ Primideal mit $\mathfrak{p} \cap U = \emptyset$,
dann ist

$i^{-1}(\mathfrak{p} R[U^{-1}]) = \{a \in R \mid \exists s \in U : sa \in \mathfrak{p}\} = \mathfrak{p}$

nach (1), da $U \cap \mathfrak{p} = \emptyset$

Bleibt zu zeigen, dass, $\mathfrak{p} R[U^{-1}] = \mathfrak{q}$ ein Primideal ist.

Sei $\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} \in \mathfrak{p} R[U^{-1}]$. Dann gilt $a \cdot b \in \mathfrak{p}$
und damit $a \in \mathfrak{p}$ oder $b \in \mathfrak{p}$, also $\frac{a}{s} \in \mathfrak{q}$ oder $\frac{b}{t} \in \mathfrak{q}$

<u>Def:</u> R ein Ring, $\mathfrak{m} \subsetneq R$ ein echtes Ideal
R nennen wir einen lokalen Ring, wenn die beiden folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind

(1) $\mathfrak{m} \subset R$ ist das einzige maximale Ideal von R.

(2) $R - \mathfrak{m}$ besteht aus Einheiten

(3) Das Komplement der Einheiten von R bildet ein Ideal

Schreibweise: $(R, \mathfrak{m})$ und $k = R/\mathfrak{m}$ nennt man den Restklassenkörper von R.

<u>Bew:</u> (2) => (3), da $R \setminus (R - \mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$ und
da $\mathfrak{m}$ ein echtes Ideal enthält $\mathfrak{m}$ keine Einheiten

(3) => (2): Es ist $\mathfrak{m} = R \setminus R^*$ ein Ideal und $R^* = R - \mathfrak{m}$

(2) => (1): Sei $I \subsetneq R$ ein echtes Ideal. Dann enthält I keine Einheiten, also $I \subset \mathfrak{m}$
und damit ist $\mathfrak{m}$ das einzige maximale Ideal von R.

(1) $\Rightarrow$ (2) Sei $f \in R \setminus \mathfrak{m}$. Angenommen f ist keine Einheit. Dann ist $I = (f)$ ein echtes Ideal und nach dem Lemma von Zorn ist I in einem maximalen Ideal η von R enthalten. Also $\eta = \mathfrak{m}$ nach (1) und dies Widerspricht $f \in I \subset \eta$, $f \notin \mathfrak{m}$ $\square$

__Beispiel__ (1) $R = \mathbb{Z}_{(p)} = \{ a/b \in \mathbb{Q} \mid p \nmid b \}$ ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal
$$\mathfrak{m} = \{ a/b \in \mathbb{Q} \mid p \nmid b \text{ und } p \mid a \},$$
da $a/b \in \mathbb{Q}$ mit $p \nmid a$, $p \nmid b$ Einheiten in $\mathbb{Z}_p$ sind.

Der Restklassenkörper
$$R/\mathfrak{m} = \mathbb{Z}_{(p)}/p\mathbb{Z}_{(p)} \cong \mathbb{Z}/(p) = \mathbb{F}_p$$
$\mathbb{Z}_{(p)}$ ist ein Ring mit gemischter Charakteristik.
$$\operatorname{char}(Q(\mathbb{Z}_{(p)})) = \operatorname{char}(\mathbb{Q}) = 0$$
$$\operatorname{char}(\mathbb{Z}_{(p)}/p\mathbb{Z}_{(p)}) = p$$

(2) Allgemeiner $\mathfrak{P} \subset R$ Primideal, dann ist $R_\mathfrak{P}$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} = \mathfrak{P} R_\mathfrak{P}$ nach (4)

Der Restklassenkörper $k = R_\mathfrak{P} / \mathfrak{P} R_\mathfrak{P} = Q((R/\mathfrak{P}))$ nach Üb Z 1.

__Def:__ Sei $A \subset \mathbb{A}^n$ eine algebraische Menge, $p \in A$ ein Punkt. Der lokale Ring von A in p ist definiert als
$$\mathcal{O}_{A,p} = \overline{K}[A]_\mathfrak{m},$$
wobei $\mathfrak{m} = I_A(p) = \{ f \in \overline{K}[A] \mid f(p) = 0 \}$

$\mathcal{O}_{A,p}$ ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal
$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_{A,p} &= \mathfrak{m}\, \overline{K}[A]_\mathfrak{m} \\ &= \{ f = g/h \mid h \notin \mathfrak{m},\ g \in \mathfrak{m} \} \\ &= \{ f = g/h \mid h(p) \neq 0,\ g(p) = 0 \} \end{aligned}$$

Der Restklassenkörper
$$k = \mathcal{O}_{A,p} / \mathfrak{m}_{A,p} \cong \overline{K}$$
vermöge $\overline{K}[A]_\mathfrak{m} \to \overline{K}$, $f \mapsto f(p)$

Prop: Sei $V \subset \mathbb{A}^n$ eine Varietät
Dann gilt
$$\bar{k}[V] = \bigcap_{p \in V} \mathcal{O}_{V,p} \subset \bar{k}(V)$$
Beweis: Sei $f \in \bar{k}(V)$. Das Definitionsgebiet von f ist
$$\operatorname{dom}(f) = \{ p \in V \mid \exists\, g, h \in k[x] \text{ mit } f = g/h,\ h(p) \neq 0 \}$$
$$= \{ p \in V \mid f \in \mathcal{O}_{V,p} \}$$
Betrachte
$$I_f = \{ h \in \bar{k}[V] \mid \exists\, g \in \bar{k}[V] : f = g/h \} \cup \{0\} \subset \bar{k}[V]$$
I_f ist ein Ideal. $f = g/h = \frac{rg}{rh}$ für alle $r \in \bar{k}[V]$
also $h \in I_f$ impliziert $rh \in I_f$.
$h_1, h_2 \in I_f$, etwa $g_1/h_1 = g_2/h_2$, also $h_2 g_1 = g_2 h_1$
da $\bar{k}[V]$ ein Integritätsring ist
$$g_1/h_1 = \frac{g_1(h_1+h_2)}{h_1(h_1+h_2)} = \frac{g_1 h_1 + h_1 g_2}{h_1(h_1+h_2)} = \frac{g_1+g_2}{h_1+h_2}$$
also $h_1 + h_2 \in I_f$
Sei $\tilde{I}_f \subset \bar{k}[x_1, .., x_n]$ das Urbild von I_f im Polynomring. Dann impliziert
$$f \in \bigcap_{p \in V} \mathcal{O}_{V,p} \quad (\Leftrightarrow \operatorname{dom} f = V),$$
dass $V(\tilde{I}_f + I(V)) = \emptyset$. Mit dem Nullstellensatz folgt
$\tilde{I}_f + I(V) = (1)$.
Somit $1 \in I_f$, also ex $g \in \bar{k}[V]$ mit $f = g/1 \in \bar{k}[V]$. ⌟

Bem: $V \subset \mathbb{A}^n$ eine Varietät $W \subset V$ eine Untervarietät
und $I_V(W) = \{ f \in \bar{k}[V] \mid f|_W \equiv 0 \}$ das Verschwindungsideal von W in V.
Da W irreduzibel ist, ist $I_V(W) \subset \bar{k}[V]$ ein Primideal.
$$\mathcal{O}_{V,W} := \bar{k}[V]_{I_V(W)}$$

$\mathcal{O}_{V,W} \subset \bar{K}(V)$ besteht aus rationalen Fkt'en, die in wenigstens einem Punkt von W, also in einer Zariski offenen Teilmenge aller Punkte von W definiert sind.

Sei $U \subset R$ multiplikativ, M R-Modul, def. $M[U^{-1}]$ und zeige, dass es ein $R[U^{-1}]$-Modul ist.

Die Modultheorie von lokalen Ringen verhält sich viel besser als für allg. Ringe.
Dies liegt an.

<u>Lemma von Nakayama</u>
Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul, $N \subset M$ ein Untermodul.
Dann gilt
$$N + \mathfrak{m} M = M \Rightarrow N = M$$

<u>Beweis:</u> Indem wir von M zu M/N übergehen können wir uns auf den Fall $N = 0$ beschränken.
Also $\mathfrak{m} M = M \Rightarrow M = 0$ ist zu zeigen.
Da M endlich erzeugt ist, gibt es $m_1, \dots, m_r$, die M als R-Modul erzeugen.
Die Voraussetzung $\mathfrak{m} M = M$ besagt, dass es Elemente $b_{ij} \in \mathfrak{m}$ gibt, sodass
$$m_i = \sum_{j=1}^{r} b_{ij} m_j$$
oder in Matrixschreibweise $(E_r - B)\begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_r \end{pmatrix} = 0$. $B = (b_{ij})$
$h = \det(E_r - B)$ ist eine Einheit in R, da
$$h \equiv 1 \mod \mathfrak{m}.$$
Multiplikation mit der Cofaktormatrix, Adjunkten liefert
$$\underbrace{\det(E - B)}_{= h} m_i = 0 \ \forall i$$
Da h eine Einheit ist folgt $m_i = 0$, $i = 1, \dots, r$ und $M = 0$. $\square$

<u>Kor:</u> Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring und M ein R-Modul.
$m_1, \dots, m_r$ erzeugen M als R-Modul genau dann, wenn
$$\bar{m}_i = m_i + \mathfrak{m} M, \quad i = 1, \dots, r$$
den $k = R/\mathfrak{m}$ - VR $M/\mathfrak{m} M$ erzeugen

Insbesondere haben alle minimalen Erzeugendensysteme von endl. erzeugten R-Moduln die gleiche Anzahl von Elementen.

05.06.18 <u>Thm</u> (Krull's Intersection thm)
Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Ring
Dann gilt
$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathfrak{m}^k = 0$$

<u>Bew:</u> Wir betrachten die Unteralgebra
$$S := R[\mathfrak{m}t] = R \oplus \mathfrak{m}t \oplus \mathfrak{m}^2 t^2 \oplus \dots \subset R[t]$$

im Polynomring $R[t]$
Da R noethersch ist, ist $\mathfrak{m}$ ein endlich erzeugtes Ideal in R. Daraus folgt, dass S eine endlich erzeugte R-Algebra ist und somit ebenfalls noethersch ist.
Wir wollen Nakayamas Lemma anwenden.
Wir definieren
$$J = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathfrak{m}^k$$

Dann ist $J \oplus Jt \oplus Jt^2 \oplus \dots \subset S$ endlich erzeugt durch endlich viele Polynome in $S \subset R[t]$, welche wir als homogene Polynome in t auffassen.
Falls r der maximale Grad in t der Erzeuger ist, dann gilt:
$$\mathfrak{m}t\, J t^r = J t^{r+1}$$

Insbesondere ist $\mathfrak{m}J = J \subset R$ und so $J = 0$ □

<u>Bsp.</u> (Funktionskeime)
Wir definieren den lokalen Ring $C^{\infty}_{\mathbb{R},0}$ von <u>Keimen</u> der C^{∞}-Funktionen wie folgt
$$C^{\infty}_{\mathbb{R},0} := \bigcup_{\substack{0 \in U \subset \mathbb{R} \\ \text{offene Umg.}}} C^{\infty}(U) / \sim ,$$

wobei $f \in C^{\infty}(U)$ und $g \in C^{\infty}(V)$ äquivalent sind ($f \sim g$), falls eine offene Umgebung $W \subset U \cap V$ der $0 \in W$ existiert mit $f|_W = g|_W$