Insbesondere haben alle minimalen Erzeugendensysteme von endl. erzeugten R-Module die gleiche Anzahl von Elementen.

05.06.18 **Thm** (Krull's Intersection thm)
Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Ring
Dann gilt
$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathfrak{m}^k = 0$$

Bew: Wir betrachten die Unteralgebra
$$S := R[\mathfrak{m}t] = R \oplus \mathfrak{m}t \oplus \mathfrak{m}^2t^2 \oplus \dots \subset R[t]$$

im Polynomring $R[t]$
Da R noethersch ist, ist $\mathfrak{m}$ ein endlich erzeugtes Ideal in R. Daraus folgt, dass S eine endlich erzeugte R-Algebra ist und somit ebenfalls noethersch ist.
Wir wollen Nakayamas Lemma anwenden.
Wir definieren
$$J = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathfrak{m}^k$$

Dann ist $J \oplus Jt \oplus Jt^2 \oplus \dots \subset S$ endlich erzeugt durch endlich viele Polynome in $S \subset R[t]$, welche wir als homogene Polynome in t auffassen.
Falls r der maximale Grad in t der Erzeuger ist, dann gilt:
$$\mathfrak{m}t\, Jt^r = Jt^{r+1}$$

Insbesondere ist $\mathfrak{m}J = J \subset R$ und so $J = 0$ □

Bsp. (Funktionskeime)
Wir definieren den lokalen Ring $C^{\infty}_{\mathbb{R},0}$ von Keimen der C^{∞}-Funktionen wie folgt
$$C^{\infty}_{\mathbb{R},0} := \bigcup_{\substack{0 \in U \subset \mathbb{R} \\ \text{offene Umg.}}} C^{\infty}(U) \Big/ \sim ,$$

wobei $f \in C^{\infty}(U)$ und $g \in C^{\infty}(V)$ äquivalent sind $(f \sim g)$, falls eine offene Umgebg $W \subset U \cap V$ der $0 \in W$ existiert mit $f|_W = g|_W$

$C^\infty_{\mathbb{R},0}$ ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal

$$\mathfrak{m}_{\mathbb{R},0} = \{ f \in C^\infty_{\mathbb{R},0} \mid f(0) = 0 \}$$

Der Wert $f(0)$ hängt nicht von der Wahl des Repr. ab.

Bew: Sei $f \in C^\infty_{\mathbb{R},0}$ ein Element mit $f \notin \mathfrak{m}_{\mathbb{R},0}$

Dann ist $f(0) \neq 0$ und es existiert ein Repr. $f \in C^\infty(U)$ mit $f(0) \neq 0$.

Da f stetig auf U ist existiert eine kleine Umgebung W von $0 \in W \subset U$, sodass f keine NS'en hat in W.

Dann gilt $(1/f_{|W}) \in C^\infty(W)$ ist ein Repräs. des Inversen des Keims $f \in C^\infty_{\mathbb{R},0}$.

Durch Taylorentwicklung ist das maximale Ideal

$$\mathfrak{m}_{\mathbb{R},0} = (x) \cdot C^\infty_{\mathbb{R},0} \subset K[[x]]$$

erzeugt durch die Funktion $f(x) = x$

Aber $C^\infty_{\mathbb{R},0}$ ist nicht noethersch.

Der Keim der Funktion

$$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

ist ein nicht triviales Element in $\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathfrak{m}^k$, da $g(x)/x^k$ C^∞ ist $\forall k$.

Def: (Zariski-Tangentialraum - finale Version)

Sei A eine alg. Menge in $\mathbb{A}^n$ und $p \in A$ ein Punkt.

Dann ist

$$\left(\mathfrak{m}_{A,p} / \mathfrak{m}_{A,p}^2 \right)^* \cong T_p A$$

als $\overline{K}$-VR heißt Zariski-Tangentialraum.

Beweis: Sei $f = g/h \in \overline{K}(x_1, \ldots, x_n)$ mit $h(p) \neq 0$.

Wir def. das Differential von f in p als

$$d_p f = \frac{h(p)\, d_p g - g(p)\, d_p h}{h(p)^2}$$

Wie im vorherigen Beweis, sehen wir, dass

$$d_p : \mathfrak{m}_{A,p} \longrightarrow T_p A^*$$
$$f \longmapsto d_p f_{|T_p A}$$

wohldef. und surjektiv ist mit Kern $\mathfrak{m}_{A,p}^2$ $\square$

Bis jetzt haben wir zwei Objekte eingeführt, wie man einem Punkt $p \in A$ auf eine alg. Menge zuordnen kann.

(1) $T_p A$ den Tangentialraum

(2) $\mathcal{O}_{A,p}$ den lokalen Ring von A in p.

Wir können $T_p A$ aus $\mathcal{O}_{A,p}$ erhalten, in dem wir $\mathfrak{m}_{A,p} / \mathfrak{m}_{A,p}^2$ bilden.

In gewisser Weise ist $T_p A$ zu grob und $\mathcal{O}_{A_p}$ zu fein

zum Bsp:

- Falls A eine Varietät ist, dann ist

$$Q(\mathcal{O}_{A_p}) = K(A)$$

- Sei $f = y^2 - x^2$, $g = y^2 - x^2 - x^3$ $\quad p = (0,0)$

$A = V(f)$ , $B = V(g)$ 

Dann ist $\mathcal{O}_{A,p} \not\cong \mathcal{O}_{B,p}$, da $\mathcal{O}_{A,p}$ kein Integritätsbereich ist

Andererseits in kleinen Umgebungen von 0 im Fall $K = \mathbb{C}$

A

sehen die alg Mengen ähnlich aus.

Mathematisch ausgedrückt:

Es existieren offene Umgebungen U, V von $0 \in \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ und eine biholomorphe Abb. $\varphi: U \to V$ welche $U \cap A$ auf $U \cap B$ abbildet

Wir def:

$\varphi: U \to V, \ (x,y) \mapsto (x, y\sqrt{1+x})$ und

$\psi: V \to U, \ (x,y) \mapsto \left(x, \frac{y}{\sqrt{1+x}}\right)$

Dann ist $\varphi^*(y^2 - x^2(1+x)) = \underbrace{(1+x)}_{\text{Einheit}}(y^2 - x^2)$

$$\psi^*(y^2 - x^2) = \frac{1}{1+x}\left(y^2 - (x^2 + x^3)\right)$$

Wir benutzen

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n \in \mathbb{Q}[[x]]$$

und φ und ψ sind def in $\Delta_1 \times \mathbb{C} = \{(x,y) \mid |x| < 1\} = U = V$

Im Allg besitzt der Grundkörper keine Topologie und von konvergenten Potenzreihen zu sprechen macht keinen Sinn.

Nichtsdestotrotz, formale Reihen $K[[X_1,..,X_n]]$ sind wohldef.

Die Konstruktion von formalen Potenzreihen funktioniert in einem sehr viel allgemeineren Kontext.

Sei $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal.

Da R eine additive Gruppe ist, können wir eine Topologie auf R definieren, wenn wir eine Umgebungsbasis von $0 \in R$ spezifizieren.

Wir nehmen die Potenzen $0 \in \mathfrak{a}^k \subset R$ als Umgeb. von 0

Eine Cauchy-Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset R$ ist eine Folge, sodass für alle $k \geq 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ ex mit $r_n - r_m \in \mathfrak{a}^k$ $\forall\, n,m \geq n_0$

Eine Nullfolge $(r_n) \subset R$ ist eine Folge, sodass für alle $k \geq 0$ ein $m_0 \in \mathbb{N}$ ex mit $r_m \in \mathfrak{a}^k$ $\forall\, m \geq m_0$

Per Def sind Nullfolgen auch Cauchy-Folgen. Wir def. die <u>Vervollständigung</u> von R bzgl der $\mathfrak{a}$-adischen Topologie als

$$\hat{R} := \{\text{Cauchy-Folgen}\} / \{\text{Nullfolgen}\}$$

Die Abb $R \to \hat{R}$ welche $r \in R$ auf die konstante Folge $(r)_{n\in\mathbb{N}}$ abbildet und komponentenweise Addition und Multiplikation machen. So wird $\hat{R}$ zu einem Ring und $R \to \hat{R}$ zu einem Ringhomomorph.

<u>Bsp/ÜA</u>: $R = K[[X_1,..,X_n]]$ die formalen Potenzreihen.

$\mathfrak{m} = (X_1,..,X_n)$

ein maximales Ideal und die $\mathfrak{m}$-adische Topologie auf R.

(a) Eine Folge $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ von Potenzreihen konv. geg 0 in dieser Top., falls:

$\forall\, k \geq 0\ \exists\, \nu_0 : f_\nu \in \mathfrak{m}^k \quad \forall\, \nu \geq \nu_0$

(b) Eine Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$ von formalen Potenzreihen konvergiert genau dann, wenn $\lim_{\nu\to 0} f_\nu = 0$ gilt.

(c) $R = K[[X_1,..,X_n]]$ ist vollst bzgl. dieser Top

(d) $(R, \mathfrak{m})$ ist ein lokaler Ring mit max. Ideal $\mathfrak{m} = (X_1,..,X_n)$

Prop.: Die Inklusion

$$\bar{K}[\mathbb{A}^n] = \bar{K}[x_1,..,x_n] \longrightarrow \bar{K}[[x_1,..,x_n]]$$

faktorisiert durch

$$\begin{tikzcd} \bar{K}[x_1,..,x_n] \arrow[dr, hook] \arrow[rr] & & \bar{K}[[x_1,..,x_n]] \\ & \bar{K}[x_1,..,x_n]_{(x_1,..,x_n)} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$\bar{K}[x_1,..,x_n]_{(x_1,..,x_n)} = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,0}$$

und deshalb

$$\hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{A}^n,0} \cong \bar{K}[[x_1,..,x_n]]$$

Bew: Sei $f = g/h \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,0}$, $h(0) = 1$

Schreibe $h = 1 + q$ mit $q \in (x_1,.., x_n)$

Dann $1/h = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^n$ konvergiert in $\bar{K}[[x_1,..,x_n]]$

Der Ringhom

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,p} \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{A}^n,p}$$

ist injektiv nach Krulls Intersection Thm. $\square$

Allgemeiner gilt:

Prop: $(R, \mathfrak{m})$ lokaler noetherscher Ring.
Sei $\hat{R}$ die $\mathfrak{m}$-adische Vervollständigung von R.
Dann impliziert Krull, dass $R \to \hat{R}$ injektiv ist.

Def.: Seien $A \subset \mathbb{A}^n$, $B \subset \mathbb{A}^n$ zwei alg. Mengen, $p \in A$ und $q \in B$.
Dann ist (A, p) <u>analytisch isomorph</u> zu (B, q), falls

$$\hat{\mathcal{O}}_{A,p} \cong \hat{\mathcal{O}}_{B,q}$$

als lokale K-Algebra