Prop.: Die Inklusion

$$\overline{K}[\mathbb{A}^n] = \overline{K}[x_1,..,x_n] \longrightarrow \overline{K}[[x_1,..,x_n]]$$

faktorisiert durch

$$\overline{K}[x_1,..,x_n]_{(x_1,..,x_n)} = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,0}$$

und deshalb $\hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{A}^n,0} \cong \overline{K}[[x_1,..,x_n]]$

Bew: Sei $f = g/h \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,0}$, $h(0) = 1$
Schreibe $h = 1 + q$ mit $q \in (x_1,..,x_n)$
Dann $1/h = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^n$ konvergent in $\overline{K}[[x_1,..,x_n]]$
Der Ringhom

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,p} \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{A}^n,p}$$

ist injektiv nach Krulls Intersection thm. $\square$

Allgemeiner gilt:
Prop: $(R, \mathfrak{m})$ lokaler noetherscher Ring.
Sei $\hat{R}$ die $\mathfrak{m}$-adische Vervollständigung von R
Dann impliziert Krull, dass $R \to \hat{R}$ injektiv ist.

Def.: Seien $A \subset \mathbb{A}^n$, $B \subset \mathbb{A}^n$ zwei alg. Mengen, $p \in A$ und $q \in B$.
Dann ist (A,p) analytisch isomorph zu (B,q), falls

$$\hat{\mathcal{O}}_{A,p} \cong \hat{\mathcal{O}}_{B,q}$$

als lokale K-Algebra

09.06.18 Satz 6:
Division mit Rest in $K[[x_1,..,x_n]]$.
Seien $f_1,..,f_r \in K[[\underline{x}]]$ und $>$ eine lokale Monomordnung (d.h. $1 > x_i$, $i = 1,..,n$)
Für jedes $f \in K[[x_1,..,x_n]]$ gibt es eindeutige $g_1,..,g_r \in K[[x_1,..,x_n]]$ und $h \in K[[x_1,..,x_n]]$, sodass

(1) $f = g_1 f_1 + \dots + g_r f_r + h$

(2 a) Kein Term von g_i in (f_i) wird von $in(f_j)$ mit $j<i$ geteilt.

(b) Kein Term von h wird von einem $in(f_i)$ geteilt

Bem: $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f_\alpha x^\alpha$ hat unendlich viele Terme.

Da $I = (x^\alpha \mid f_\alpha \neq 0)$ endlich erzeugt ist und $x^\alpha \mid x^\beta$, impliziert $x^\alpha > x^\beta$ (> lokal) ist $in_>(f)$ einer der Terme deren Exponenten Erzeugern von I entsprechen.

Beweis:

Der Beweis wird diesmal keinen Algorithmus liefern, stattdessen liefert er Reihen $\sum_{\nu=0}^{\infty} g_i^{(\nu)}$, $\sum_{\nu=0}^{\infty} h^{(\nu)}$, die in der m-adischen Topologie gegen die g_i und h konvergieren.

Um die Konvergenz einzusehen zeigen wir zunächst, dass wir $>$ durch eine Gewichtsordnung $>_\omega$ mit $\omega = (\omega_1, .., \omega_n) \in \mathbb{R}^n_{<0}$ ersetzen können, sodass

$$in_>(f_i) = in_{>_\omega}(f_i)$$

gilt.

Für $i = 1, .., r$ betrachten wir dazu $f_i = \sum f_{i,\alpha} x^\alpha$, das monomiale Ideal

$$I_i = (\{x^\alpha \mid f_{i,\alpha} \neq 0\} - \{x^\beta \mid in(f_i) = f_{i,\beta} x^\beta\}).$$

Um $in_{>_\omega} f_i = in_> f_i$ zu erreichen, genügt es $\omega = (\omega_1, .., \omega_n)$ so zu wählen, dass

$$\omega(in_> f_i) = \omega(x^\beta) = \omega \cdot \beta > \omega(x^\alpha)$$

für alle Erzeuger x^α von I_i gilt.

Dann gilt

$$\omega(in_> f_i) > \omega(x^\alpha)$$

für alle $x^\alpha \in I_i$, da die Gewichte negativ sind, also

$$in_{>_\omega}(f_i) = in_>(f_i)$$

Also müssen wir endlich viele Vergleiche zwischen Monomen beibehalten

Sei $M = \bigcup_{i=1}^{r} \{\text{Monome von } f_i\} \cup \bigcup_{i=1}^{r} \{\text{Erzeuger von } I_i\} \cup \{1, x_1, .., x_n\}$

Mit dem Argument von ÜB 4 Aufgabe 1 folgt die Existenz so eines Gewichts $\omega \in \mathbb{R}^n$.
Und wegen $1 > X_i$ $i = 1, .., n$ gilt, dass $\omega = (\omega_1, .., \omega_n)$ strikt negative Gewichte hat.
Wir definieren $g_i^{(\nu)}$ und $h^{(\nu)}$ nun rekursiv.

$$f^{(0)} = f.$$

$$f^{(0)} = \sum_{i=1}^{r} g_i^{(0)} in(f_i) + h^{(0)}$$

mit

(2a) Kein Term von $g_i^{(0)} in(f_i)$ ist durch $in(f_j)$ teilbar für $j < i$.

(2b) Kein Term von $h^{(0)}$ ist durch ein $in(f_i)$ teilbar.

Dann setzen wir

$$f^{(1)} = f^{(0)} - \left(\sum_{i=1}^{r} g_i^{(0)} f_i + h^{(0)}\right)$$

Rekursiv weiter

$$f^{(\nu)} = \sum_{i=1}^{r} g_i^{(\nu)} in(f_i) + h^{(\nu)}$$

mit (2a) und (2b) und

$$f^{(\nu+1)} = f^{(\nu)} - \left(\sum_{i=1}^{r} g_i^{(\nu)} f_i + h^{(\nu)}\right)$$

Da $in_{>\omega}\left(\sum_{i=1}^{r} g_i^{(\nu)} f_i + h^{(\nu)}\right)$

$$= \max\left(\{ in_{>\omega}(g_i^{(\nu)}) \cdot in_{>\omega}(f_i) \mid i = 1, .., r \} \cup \{ in_{>\omega} h^{(\nu)} \}\right)$$

hebt sich der Leitterm von $f^{(\nu)}$ in der Differenz raus und wir haben

$$in_{>\omega}(f^{(\nu+1)}) < in_{>\omega}(f^{(\nu)}),$$

also die Werte von $\omega(in_> f^{(\nu)})$ werden immer negativer.
Nun enthält $K[[X_1, .., X_n]]$ nur endlich viele Monome $m \notin (X_1, .., X_n)^k$, genauer $\binom{n+k-1}{n}$-viele.
Nach endlich vielen Schritten haben wir also

$$f^{(\nu)} \in (X_1, .., X_n)^k$$

Genauer: Für alle $k \in \mathbb{N}$ ex. $\nu_0 = \nu_0(k)$ so, dass

$$f^{(\nu)} \in (X_1, .., X_n)^k$$

für alle $\nu \geq \nu_0$

Es folgt $\lim_{\nu\to\infty} f^{(\nu)} = 0 \in K[[x_1,..,x_n]]$
und

$$\lim_{\nu\to\infty} g_i^{(\nu)} = 0 \quad , \quad \lim_{\nu\to\infty} h^{(\nu)} = 0$$

folgt ebenfalls, da

$$\omega(in_{>\omega}\, g_i^{(\nu)}) + \omega(in_{>\omega} f_i) < \omega(f^{(\nu)})$$

Also $\sum_{\nu=0}^{\infty} g_i^{(\nu)}$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} h^{(\nu)}$

konvergieren in der $\mathfrak{m}$-adischen Topologie und

$$f = \sum_{i=1}^{r} g_i f_i + h$$

mit $g_i = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_i^{(\nu)}$, $h = \sum_{\nu=0}^{\infty} h^{(\nu)}$

(2a) und (2b) sind erfüllt und Eindeutigkeit ergibt sich wie gehabt.

Gröbnerbasen (oft auch Standardbasen)

<u>Def.</u>: $f_1, .., f_r \in K[[x_1,..,x_n]]$ sind eine GB von $I = (f_1,..,f_r)$ bzgl. einer Monomordnung, lokale Mon.ordg $>$!, falls

$$in_>(I) = (\{ in_>(f) \mid f \in I \}) = (in_>(f_1), .., in(f_r))$$
$$\subset K[x_1,..,x_n] \subset K[[x_1,..,x_n]]$$

<u>Korollar</u>: $K[[x_1,..,x_n]]$ ist Noethersch, da Monomiale Ideale nach dem Lemma von Dixon endlich erzeugt sind.

Der Satz von Macaulay ist leicht anders

<u>Satz</u> (Macaulay) Seien $f_1,..,f_r \in K[[x_1,..,x_n]]$ eine GB von $I = (f_1,..,f_r)$ bzgl. einer lokalen Monomordnung.
Dann repräsentieren die Monome $m \notin in_>(I)$ K-linear-unabhängige Elemente des K-VR $K[[x_1,..,x_n]]/I$ welche einen dichten Unterraum bzgl. der $\mathfrak{m}$-adischen Topologie von $K[[x_1,..,x_n]]/I$ erzeugen.
Die Situation ist besser, wenn

$$K[x_1,..,x_n]/in(I)$$

ein endlich dimensionaler K-VR. ist. In diesem Fall repräsentieren die $m \notin in(I)$ eine Basis.

Def: (Multiplizität)

Sei $f \in K[x_1, .., x_n]$. Dann ist

$$f = f_m + f_{m+1} + \dots + f_d,$$

wobei die f_k homogen vom Grad k sind.

Ist $f_m \not\equiv 0 \in K[x_1, .., x_n]$, dann nennen wir

$$m = mult_0(f)$$

die Multiplizität von f in 0.

Verwenden wir eine lokale Monomordnung $>$, die $>_{(-1,\dots,-1)}$ verfeinert, dann ist $in_>(f)$ einer der Terme von f_m.

Für Potenzreihen $f \in K[[x_1, .., x_n]]$ definieren wir

$$mult_0(f) = mult(f) = m,$$

falls $f = \sum_{k=m} f_m$ mit $f_m \not\equiv 0$.

Für Punkt $p = (a_1, .., a_n) \in \mathbb{A}^n$ entwickeln wir

$$f \in K[x_1, .., x_n] \in \overline{K}[x_1 - a_1, .., x_n - a_n]$$

in homogene Polynome in den Variablen $x_1 - a_1, .., x_n - a_n$ und definieren

$$mult_p(f) = m,$$

falls $f = f_m(x_1 - a_1, .., x_n - a_n) + \dots + f_d(x_1 - a_1, .., x_n - a_n)$
$\not\equiv 0$.

Bem: $f \in K[x_1, .., x_n]$

(1) $mult_p(f) = 0 \iff p \notin V(f)$

(2) $mult_p(f) = 1 \implies f$ definiert in p glatte Hyperfläche $V(f)$.

(3) $mult_0(f \cdot g) = mult_0(f) + mult_0(g)$

$mult_0(f + g) \geq \min(mult_0(f), mult_0(g))$

und Gleichheit gilt, wenn f und g verschiedene Multiplizitäten haben.

Die Umkehrung von (1) gilt nicht, denn aus $mult_p(f) = 1$ folgt $mult_p(f^2) = 2$, aber

$$V(f) = V(f^2).$$

Wir spezifizieren nun den Fall $n = 2$ ebener Kurven

Sei $f \in K[x, y]$

$$f = f_m + \dots + f_d, \quad m = mult_0(f)$$

Dann ist $f_m \in K[X,Y]$ ein homogenes Polynom und zerfällt deshalb in $\overline{K}[X,Y]$ in ein Produkt von Linearformen

$$f_m(X,Y) = \prod_{i=1}^{m} (\alpha_i Y - \beta_i X) \in \overline{K}[X,Y]$$
$$= \prod_{j=1}^{s} \ell_j(X,Y)^{e_j}$$

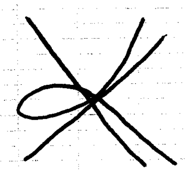
Wir nennen die Geraden $L_1 = V(\ell_1), \dots, L_s = V(\ell_s)$ die Tangenten von f im Punkt O und $e_1, \dots, e_s$ deren Vielfachheiten.

Wir sagen f hat einen gewöhnlichen m-fachen Punkt, wenn alle $e_j = 1$, d.h. die Geraden $L_1, \dots, L_m$ paarweise verschieden sind.

Analoge Notation verwenden wir für $f \in K[[X,Y]]$ oder Punkte $p \in \mathbb{A}^2$ verschieden vom Nullpunkt, in dem wir erst eine Translation von p nach O verwenden, d.h. Koordinaten $(X-a, Y-b)$ für $p=(a,b)$ betrachten.

__Beispiel__ (1): $f = Y^2 - X^2 - X^3 \in \mathbb{R}[X,Y]$

$f_m = Y^2 - X^2 = (Y-X)(X+X)$ hat in O einen gewöhnlichen Doppelpunkt



(2) $g = Y^2 + X^2 + X^3 \in \mathbb{R}[X,Y]$ hat in O Multiplizität 2.

und da $Y^2 + X^2 = (Y - iX)(Y + iX) \in \mathbb{C}[X,Y]$ ist dies ebenfalls ein gew. Doppelpunkt mit einem Paar von konjugiert komplexen Tangenten

__Def.__ (Schnittmultiplizitäten, intersection multiplicitas)

Seien $f, g \in K[X,Y]$. Dann heißt

$$i(f,g,O) = \dim_{K\text{-VR}} K[[X,Y]]/(f,g)$$

die Schnittmultiplizität von f und g in O.

Analog definieren wir

$$i(f,g,p), \quad p \in \mathbb{A}^2$$

und

$$i(f,g,O), \quad f,g \in K[[X_1, \dots, X_n]]$$

verwenden wir auch.

Bem: $i(f,g,0)=\infty$ gilt z.B wenn f und g einen gemeinsamen Faktor haben, oder in 0 verschwindet

Übung (Satz) $f,g \in K[X,Y]$ von Multiplizität m und n in 0

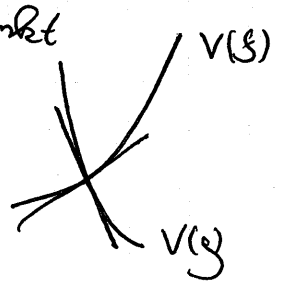
Dann gilt

$$i(f,g,0) \geq \mathrm{mult}_0 f \cdot \mathrm{mult}_0 g$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn f und g im Nullpunkt keine gemeinsame Tangente haben

Im Fall $i(f,g,0)=1$ folgt $V(f)$ und $V(g)$ sind glatt in 0 mit versch. Tangenten.

Man spricht in diesem Fall von einem transversalen Schnittpunkt



12.06.18 Im Kap 2 haben wir gesehen, dass wir mit Hilfe von GB-Berechnung bzgl lex bzw. Produktordnung Variablen aus einem Polynomialen Gleichungssystem eliminieren können.

Es gibt für diese Methode auch klassischere Methoden, die sich in gewisser Weise besser verhalten.

Thm (Sylvester) Sei K Körper und

$$f = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n$$
$$g = b_0 X^m + b_1 X^{m-1} + \dots + b_m$$

Polynome von Grad n bzw m in $K[X]$. f und g haben genau dann einen gemeinsamen Faktor, wenn die Sylvestermatrix

$$\mathrm{syl}(f,g) = \left.\begin{pmatrix} a_0 & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ \vdots & & a_0 & b_{m-1} & \cdots & b_0 \\ a_n & & \vdots & b_m & & \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ & & a_n & & & b_m \end{pmatrix}\right\} m+n$$