Terminierung folgt, wenn wir zeigen können, dass nach endlich vielen weiteren Schritten $h=0$ oder $D_h=\phi$ gilt

Wir homogenisieren h_{N+1} und die f_i mit der zusätzlichen Variable x_0:

$$H_{N+1} = x_0^{\deg h_{N+1}} h_{N+1}\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$$

$$F_i = x_0^{\deg f_i} f_i\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \in K[x_0, \dots, x_n]$$

Auf $K[x_0,\dots,x_n]$ betrachten wir folgende Monomordnung $>_g$

$$x_0^c x^\alpha >_g x_0^d x^\beta \iff \deg(x_0^c x^\alpha) > \deg(x_0^d x^\beta)$$
oder $\deg(x_0^c x^\alpha) = \deg(x_0^d x^\beta)$
und $x^\alpha > x^\beta$

Das ist eine globale Monomordnung

$$in_{>_g}(F_i) = x_0^{ecart(f_i)} in(f_i)$$

Also wenn wir h_{N+1} durch die f_i dividieren folgen wir Moras Algorithmus für homogene Polynome H_{N+1}, F_i bzgl. globaler Monomordnung, welcher terminiert.

15.06.18 <u>Korrektheit</u>

Rekursiv starten mit $u_0=1$, $g_i^{(0)}=0$, $i=1,\dots,r$ in den ersten $k-1$ Schritten nehmen wir an, dass wir eine Darstellung

$$u_\ell g = g_1^{(\ell)} f_1 + \dots + g_r^{(\ell)} f_r + h_\ell$$

mit $in(u_\ell)=1$, $\ell=0,\dots,k-1$ gefunden haben.

Dann, solange Bedingung in der while-Schleife erfüllt ist wählen wir ein

$$f = f^{(k)} \in D(h_{k-1})$$

und setzen

$$h_k = h_{k-1} - m_k f^{(k)}, \quad \text{wobei } m_k = \frac{in(h_{k-1})}{in(f^{(k)})}$$

Es gibt zwei Möglichkeiten

(a) $f^{(k)} \in \{f_1,\dots,f_r\}$

(b) $f^{(k)} \in D^{k-1} - \{f_1,\dots,f_r\}$, also $f^{(k)}$ ist eines der Elemente $h^{(0)},\dots,h^{(k-1)}$

Dann setzen wir $h_k + m_k f^{(k)} = h_{k-1}$ in die Gleichung für h_{k-1} ein.

(a) $u_{k-1} g = g_1^{(k-1)} f_1 + \dots + g_r^{(k-1)} f_r + m_k f^k + h_k$

mit $f^{(k)} = f_t$ für ein $t \in \{1,\dots,r\}$ $= g_1^{(k)} f_1 + \dots + (m_k + g_t^{(k-1)}) f_t + \dots + g_r^{(k)} f_r + h_k$

(b) $u_k g = g_1^{(k)} f_1 + \dots + g_r^{(k)} f_r + h_k$

mit $u_k = u_{k-1} + m_k u_e$, falls $f = h_e$

Im beiden Fällen haben wir $in(u_k) = in(u_{k-1}) = 1$

Im Fall (b):

$in(h_e) > in(h_{k-1}) = in(m_k \cdot h_e)$
$= m_k \, in(h_e)$

Also $in(u_{k-1}) = 1 > m_k = in(m_k u_e)$ und

daher $in(u_k) = in(u_{k-1}) = 1$

Also gilt: $u_N g = g_1^{(N)} f_1 + \dots + g_r^{(N)} f_r + h_N$

wobei $h_N = 0$, falls $h = 0$ den Abbruch erzwingt und falls $h_N \neq 0$ die Bed $D(h) = \emptyset$ den Abbruch ergibt.

Es ist leicht zu sehen, dass (2a') und (2b') erfüllt sind.

<u>Satz</u>: (Buchbergers Kriterium)

Seien $f_1,\dots,f_r \in K[x_1,\dots,x_n] \subset \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,0} \subset K[[x_1,\dots,x_n]]$

$>$ eine lokale Monomordnung.

Setzen $M_i = (in f_1,\dots, in f_{i-1}) : in f_i$

Zu jedem minimalen Erzeuger $m \in M_i$ wähle ein $j < i$, sodass $m \, in f_i \in (in f_j)$, etwa

$$m \, in f_i = n \, in f_j$$

für einen Term n.

Hat jedes der Polynome $m f_i - n f_j$ eine Moradarstellung mit Rest $h = 0$, dann bilden $f_1,\dots,f_r$ eine GB von $(f_1,\dots,f_r) \subset K[[x_1,\dots,x_n]]$

<u>Beweis</u>: Betrachte die Syzygien

$$G^{(i,m)} = \left(-\frac{g_1^{(i,m)}}{u},\dots,-n-\frac{g_j^{(i,m)}}{u},\dots,m-\frac{g_i^{(i,m)}}{u},\dots,-\frac{g_r^{(i,m)}}{u}\right)$$

Diese haben bzgl der induzierten Ordnung Leitterme

$$\mathrm{in}(G^{((i,m))}) = m\, e_i$$

Sei nun $a_1 f_1 + \dots + a_r f_r$ mit $a_i \in K[[x_1, \dots, x_n]]$ eine beliebiges Element im Ideal und

$$(g_1, \dots, g_r) \equiv (a_1, \dots, a_r) \mod (G^{((i,m))})$$

der Rest bei Division von $(a_1, \dots, a_r) \in K[[x_1, \dots, x_n]]^r$ nach den $G^{((i,m))}$. Dann gilt

$$a_1 f_1 + \dots + a_r f_r = g_1 f_1 + \dots + g_r f_r$$

und $g_1, \dots, g_r$ erfüllen Bedingung (2a) + (2b) für eindeutige Division in $K[[x_1, \dots, x_n]]$ $(a_i \notin \Delta_j \text{ für } j < i)$

Also

$$\mathrm{in}(a_1 f_1 + \dots + a_r f_r) = \mathrm{in}(g_1 f_1 + \dots + g_r f_r)$$

$$= \max \{ \mathrm{in}(g_i)\, \mathrm{in}(f_i) \} \in (\mathrm{in}(f_1), \dots, \mathrm{in}(f_r))$$

da diese paarweise versch sind. ($m e_i \nmid$ Terme von g_i)

<u>Korollar:</u> In dem wir Mora's Algorithmus solange anwenden, bis wir keine neuen Leitterme entdecken, lässt sich eine GB $\subset K[[x_1, \dots, x_n]]$ berechnen, etwa $f_1, \dots, f_{r'}$ von $(f_1, \dots, f_r)$ $\square$

Zurück zu Schnittmultiplizitäten:

Für $f, g \in K[X, Y]$, $p = 0 \in \mathbb{A}^2$ der Nullpunkt

$$i(f, g, 0) = \dim_{K\text{-VR}} K[[X, Y]]/(f, g)$$

Wenn f und g keine gemeinsame Komponente h mit $0 \in V(h)$ haben, dann gilt, dass

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2, 0}/(f, g)$$

ein endlich-dimensionaler K-VR ist.

<u>Beweis:</u>

Sei $h = ggT(f, g)$, etwa $f = h \cdot f_1$ und $g = h g_1$

Dann gilt

$$(f, g)\, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2, 0} = (f_1, g_1)\, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2, 0},$$

da $h \notin \mathfrak{m}_{\mathbb{A}^2, 0}$, weil $h(0) \neq 0$

Wir haben gesehen, dass $\dim_{K\text{-VR}} K[X, Y]/(f_1, g_1) < \infty$ gilt.

Sei $m = (X, Y)$. Es folgt, dass

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2, 0}/(f_1, g_1)\, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2, 0} \cong \left(K[X, Y]/(f_1, g_1) \right)_m$$

endl. dim K-VR ist

<u>Prop.</u> Seien $f, g \in K[X,Y]$ ohne gemeinsamen Faktor h mit $O \in V(h)$. Dann gilt

$$i(f,g,O) = \dim_{K\text{-VR}} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,0}/(f,g)$$

<u>Beweis:</u> Wir vervollständigen den Ring $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,0}/(f,g)$ in dem von $(X,Y) = m$ erzeugten Ideal.

Es gilt

$$K[[X,Y]]/(f,g) = \hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{A}^2,0}/(f,g)\,\hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{A}^2,0} = \overline{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,0}/(f,g)}^{m} = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,0}/(f,g),$$

da dies ein endl. dim K-VR ist

<u>Thm.</u> Seien $f, g \in K[X,Y]$ und $O \in \mathbb{A}^2$ der Nullpunkt.

(i) $i(f,g,O) < \infty$ gdw f, g haben keinen gemeinsamen Faktor h mit $h(O) = 0$.

(ii) $i(f, g + hf, 0) = i(f,g,O)$

(iii) $i(f,g,0) = i(g,f,0)$

(iv) $i(f,g,0) \geq \mathrm{mult}_0 f \cdot \mathrm{mult}_0 g$ und Gleichheit gilt, wenn f und g in Null keine gemeinsame Tangente haben.

(v) $i(f, g \cdot h, O) = i(f,g,O) + i(f,h,0)$

<u>Bew:</u> (i) – (iii) klar

<u>Korollar:</u> Es ist $i(f,g,0) = 1$ genau dann, wenn $V(f)$, $V(g)$ in O glatte Kurven sind und für

$$f = f_1 + \dots + f_d, \quad g = g_1 + \dots + g_e$$

mit f_i, g_j homogen gilt

$$(f_1, g_1) = (X, Y)$$

<u>Bew:</u> ohne den Satz.

Es gilt $i(f,g,0) = 1$ gdw $(f,g) \subset \mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{A},0}$ erzeugen.

Es sind $f_1, g_1 \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ $K = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,0}/\mathfrak{m}$ linear-unabhängig und das ist äq zu $(f_1, g_1) = (X,Y)$