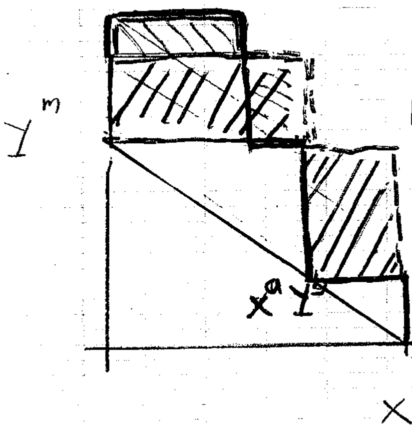
19.06.18 Bew Thm: (iv) Zunächst betrachten wir den Fall $n = \mathrm{mult}_0 f$, $m = \mathrm{mult}_0 g$ das f_n und g_m keinen gem. Faktor haben. Wir betrachten eine GB von $(f,g) \subset K[[X,Y]]$ und Macaulay. Da GB-Berechnungen sind lineare Algebra Rechnungen können wir o.E annehmen, dass K ein unendlicher Körper ist.

$\mathrm{in}\, f = \mathrm{in}\, f_n$, $\mathrm{in}\, g = \mathrm{in}\, g_m$

Nach linearer Koordinatentransformation können wir annehmen, dass $\mathrm{in}\, f = X^n$ gilt und mit Hilfe von (2) $\mathrm{in}\, g = X^a Y^b$ mit $a < n$ und $a + b = m$



Der letzte Test mit Y^k geht auf, da alle Terme oberhalb der Treppe liegen.
Zu zeigen ist die Anzahl der Gitterpunkte unterhalb der Treppe stimmt mit der Fläche unterhalb der Treppe überein.
Dies ist $n \cdot m$ und elementar-geometrisch klar.

Haben f_n und g_m einen gemeinsamen Faktor h und wir können annehmen, dass $h = X^k$ gilt, dann bricht die GB Rechnung von f_n und g_m mit einem Term $X^k Y^c$ ab, die von f und g allerdings nicht: Wir kriegen ein neues GB-Element das Grad größer $\deg(X^k Y^c X^e)$ hat.
Die Treppe von f und g liegt oberhalb der Treppe von f_n, g_m und der Y^{k+e+c} nach $X^{k+e} Y^c$
Damit hat die Fläche unter der Treppe zu f,g Größe größer $n \cdot m$.

(v) $i(f, gh, 0) = i(f,g,0) + i(f,h,0)$. Haben f und $g \cdot h$ einen gem. Faktor, der in Null verschwindet, dann sind beide Seiten unendlich.

Betrachte die Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,0}/(f,h) \xrightarrow[\cdot g]{\phi} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,0}/(f,gh) \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,0}/(f,g) \to 0$$

$$\bar{1} \longmapsto \bar{g}$$

z.z., dass diese ein kurze ex Seq.

Da gemeinsame Faktoren, die in 0 nicht verschwinden Einheiten in $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,0}$ sind, dürfen wir annehmen, dass f und $g \cdot h \in K[X,Y]$ teilerfremd sind.

Wir verwenden nun, dass $K[X,Y]$ faktoriell ist.
(Wenn wir wüssten, dass $K[[X,Y]]$ faktoriell ist, könnten wir auch mit diesen arbeiten und bekämen ein allgemeines Ergebnis.

$$f = f_1 \cdots f_r \quad , \quad f_i \in K[[X,Y]] \text{ irreduzibel}$$

Man nennt die f_i die analytischen Zweige von f in O.
Als ersten Schritt zeigen wir, dass der Syzygienmodul

$$\operatorname{Ker} \mathcal{O}^2_{\mathbb{A}^2,0} \xrightarrow{(f,g)} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,0}$$

von der trivialen" bzw $\binom{g}{-f}$ erzeugt wird.
Sei $A f + Bg = 0 \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,0}$
Wählen wir $\eta \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,0} - m_{\mathbb{A}^2,0}$, also $\eta(0) \neq 0$
mit $\eta A = a$, $\eta B = b$, $a, b \in K[X,Y]$.
Da η eine Einheit ist, ist dann auch

$$af + bg = 0 \in K[X,Y]$$

Damit folgt, da f und g teilerfremd sind:

$$b = cf \quad , \quad a = -cg$$

und

$$\binom{A}{B} = \frac{1}{\eta}\binom{-cg}{cf} = \frac{c}{\eta}\binom{-g}{f} \quad \text{bzw}$$

$$\operatorname{Ker}\left(\mathcal{O}^2_{\mathbb{A}^2,0} \to \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,0}\right) = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,0}\binom{-g}{f}$$

Es folgt $\varphi : \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,0}/(f,h) \xrightarrow{g} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,0}/(f,gh)$
ist injektiv.
Es gilt $gb \in (f,gh) \iff \Phi(\bar{b}) = 0$ und

$$gb = af + cgh \quad , \quad af + (ch - b)g = 0 .$$

Aus $\binom{a}{ch-b} = d\binom{-g}{f}$ folgt $b = ch - df \in (f,h)$, d.h.
Φ ist injektiv.

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,0}/(f,h) \xrightarrow[\times g]{\Phi} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,0}/(f,gh) \xrightarrow{\Psi} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2,0}/(f,g)$$

Ψ ist klarer weise surjektiv
Bleibt $\operatorname{Ker} \Psi = \operatorname{Im} \varphi$ zu zeigen.
Sei $a \in \mathcal{O}^2_{\mathbb{A}^2,0}$ ein Element, welches ein $\bar{a} \in \operatorname{Ker} \Psi$ repräsentiert.

D.h. $a \in (f, g)$ und so $\bar{a} \in (\bar{g}) = \text{Bild } \bar{\Phi}$ $\square$

§4 Dass affine Spektrum eines Ringes

Im dem vorangegangenen Kapitel hatten wir gesehen, dass maximale Ideale in $\bar{K}[x_1, \ldots, x_n]$ Punkte entsprechen Primideale Varietäten. Und jede reduzierte endlich erzeugte $\bar{K}$-Algebra entspricht dem Koordinatenring $\bar{K}[A]$. einer algebraischen Menge.
Grothendiecks Ideen Spektrums macht diese Korrespondenzen wesentlich allgemeiner.

4.1. Def. Sei R ein (kommutativer) Ring (mit 1)
Als Menge definieren wir

$$\operatorname{Spec} R = \{ \mathfrak{P} \subset R \mid \mathfrak{P} \text{ Primideal} \}$$

Als nächstes definieren wir die Zariski-Topologie auf $\operatorname{Spec} R$.
Für $\mathfrak{a} \subset R$ beliebiges Ideal sei

$$V(\mathfrak{a}) = \{ \mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} R \mid \mathfrak{P} \supset \mathfrak{a} \}$$

Mit dem Lemma von Zorn folgt, dass jedes Ideal $\mathfrak{a} \subsetneq R$ in einem max. Ideal liegt. $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{a}$.
Also tautologische Version vom schwachen Nullstellensatz:

$$V(\mathfrak{a}) = \emptyset \iff \mathfrak{a} = (1)$$

Die Mengen $V(\mathfrak{a})$ genügen den Axiomen abgeschl. Mengen einer Topologie

(1) $V(0) = \operatorname{Spec} R$

(2) $V(1) = \emptyset$

(3) $V(\sum_i \mathfrak{a}_i) = \bigcap_i V(\mathfrak{a}_i)$

(4) $V(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$

zu (4). $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{a} \supset \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$, so folgt $V(\mathfrak{a}) \subset V(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})$
Also $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \subset V(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})$
Für die Umkehrung: Angenommen $\mathfrak{P} \notin V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$
d.h. es ex $a \in \mathfrak{a}$ mit $a \notin \mathfrak{P}$ und $b \in \mathfrak{b}$ mit $b \notin \mathfrak{P}$.
Da $\mathfrak{P}$ prim gilt $a \cdot b \notin \mathfrak{P}$ und so $\mathfrak{P} \notin V(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})$

Die Komplemente $U = \mathrm{Spec}(R) - V(\mathfrak{a})$ bilden die offenen Mengen der Zariski-Topologie und

$$D_f = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R \mid f \notin \mathfrak{p}\} = \mathrm{Spec}\, R - V(f)$$

bilden eine Basis der Topologie.

$$U = \mathrm{Spec}\, R - V(\mathfrak{a}) = \bigcup_{f \in \mathfrak{a}} D_f$$

Wir haben also eine Abbildung

$$\{\text{Ideale v. } R\} \xrightarrow{V} \{\text{alg. Mengen von } \mathrm{Spec}\, R\}, \quad \mathfrak{a} \mapsto V(\mathfrak{a})$$

In der umgekehrten Richtung:

$$\{\text{Ideale} \subset R\} \longleftarrow \{\text{Teilmengen von } \mathrm{Spec}\, R\}, \quad I(A) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in A} \mathfrak{p} \longleftarrow\!\shortmid A$$

$I(A)$ ist stets ein Radikalideal, denn

$$f^N \in I(A) \Rightarrow f^N \in \mathfrak{p} \ \forall \mathfrak{p} \in A \Rightarrow f \in \mathfrak{p} \ \forall \mathfrak{p} \in A$$

Insgesamt $f \in I(A)$

In der Tat gilt: <u>Tautologische Ver. des Nullstellensatz</u>

$A = V(\mathfrak{a}) \subset \mathrm{Spec}\, R$ eine alg. Teilmenge. Dann gilt

$I(A) = \mathrm{rad}\, \mathfrak{a}$.

<u>Beweis</u>: $\mathrm{rad}\, \mathfrak{a} \subset I(V(\mathfrak{a}))$ haben wir gerade gesehen.

Für die Gleichheit müssen wir zeigen, dass $f \notin \mathrm{rad}(\mathfrak{a})$ gilt

Dann ex $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$ mit $f \notin \mathfrak{p}$.

<u>Lemma</u> (Krull)

R Ring, $\mathfrak{a}$ Ideal, S eine multiplikative Teilmenge mit $S \cap \mathfrak{a} = \emptyset$

Dann ist jedes maximale Element der Menge

$$M = \{\mathfrak{b} \subset R \text{ Ideal} \mid \mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}, \ \mathfrak{b} \cap S = \emptyset\}$$

ein Primideal und solche Elemente ex nach dem Lemma von Zorn.

<u>Beweis</u>: Sei $\mathfrak{p} \in M$ maximal, $a, b \in R - \mathfrak{p}$. Es gilt

$\mathfrak{p} + (a), \ \mathfrak{p} + (b) \supsetneq \mathfrak{p}$ und daher nicht in M.

Also ex $t_1 = p_1 + r_1 a \in S \cap (\mathfrak{p} + (a))$, $t_2 = p_2 + r_2 b \in S \cap (\mathfrak{p} + (b$

$S \ni t_1 \cdot t_2 = (p_1 + r_1 a)(p_2 + r_2 b) \in \mathfrak{p} + (ab)$ und

somit $a \cdot b \notin \mathfrak{p}$ □

Zum Bew des NS: Betrachte f mit $f^N \notin \mathfrak{a}$.

Dann ist $S = \{f^N\}$ und $\mathfrak{a}$ disjunkt und nach dem Lemma von Krull ex $\mathfrak{p}$ mit $f \notin \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$. □

$$f \notin I(V(\mathfrak{a})) = \bigcap_{\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}} \mathfrak{p}$$

Beispiel: $R = \mathbb{C}[X, Y]$
Spec R enthält 3 Arten von Punkten.

- maximale Ideale
$$\mathfrak{m} = (X-a, Y-b)$$

- $\mathfrak{p} = (f)$ Hauptideale, die von irreduziblen $f \in \mathbb{C}[X, Y]$ erzeugt werden.

- (0) das Nullideal.

Die Punkte $\mathfrak{p} = (f)$ sind keine abgeschlossenen Punkte
$\{(f)\} \subset \operatorname{Spec} R$ und $\overline{\{(f)\}} = \{\mathfrak{m} \supset (f)\} \cup \{(f)\}$

Allgemein: Für $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$, R beliebig gilt:
$$\overline{\{\mathfrak{p}\}} = V(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}\} \subset \operatorname{Spec} R$$

In der Tat $V(\mathfrak{a}) \ni \mathfrak{p}$ gdw $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$ und die kleinste solche abgeschl. Menge ist $V(\mathfrak{p})$.
Man nennt $\mathfrak{p}$ den generischen Punkt von $V(\mathfrak{p})$.