<u>Beispiel:</u> $R = \mathbb{C}[X, Y]$
Spec R enthält 3 Arten von Punkten.
- maximale Ideale
  $$\mathfrak{m} = (X-a, Y-b)$$
- $\mathfrak{P} = (f)$ Hauptideale, die von irreduziblen $f \in \mathbb{C}[X, Y]$ erzeugt werden.
- (0) das Nullideal.

Die Punkte $\mathfrak{P} = (f)$ sind keine abgeschlossenen Punkte
$\{(f)\} \subset \operatorname{Spec} R$ und $\overline{\{(f)\}} = \{\mathfrak{m} \supset (f)\} \cup \{(f)\}$
Allgemein: Für $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} R$, R beliebig gilt:
$$\overline{\{\mathfrak{P}\}} = V(\mathfrak{P}) = \{\mathfrak{q} \supset \mathfrak{P}\} \subset \operatorname{Spec} R$$
In der Tat $V(\mathfrak{a}) \ni \mathfrak{P}$ gdw $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{a}$ und die kleinste solche abgeschl. Menge ist $V(\mathfrak{P})$.
Man nennt $\mathfrak{P}$ den generischen Punkt von $V(\mathfrak{P})$.

22.06.18 Die Idee auch nicht abgeschlossene Punkte zu betrachten kann sehr nützlich sein.
Angenommen wir haben eine Eigenschaft P, die eine offene Bedingung an Spec R stellt
$$\{\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} R \mid \mathfrak{P} \text{ erfüllt } P\}$$
ist eine offene Menge.
Wenn diese Bedingung im generischen Punkt $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} R$, $\mathfrak{P} \in V(\mathfrak{P})$, erfüllt ist, dann gilt sie in allen Punkten $\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{P})$, da jede offene Umgebung von $\mathfrak{q}$ $\mathfrak{P}$ enthält.

<u>Prop:</u> Sei M ein <u>endlich</u> erzeugter R-Modul.
Die Bedingung $M_{\mathfrak{P}} = 0$ ist eine offene Bedingung.
Genauer
$$\operatorname{Supp} M := \{\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} R \mid M_{\mathfrak{P}} \neq 0\}$$
$$= V(\operatorname{Ann} M)$$
Supp M heißt Träger von M.
<u>Beweis:</u> $M = (m_1, \ldots, m_r)$
Angenommen $\mathfrak{P} \notin \operatorname{Supp} M$, d.h. $M_{\mathfrak{P}} = 0$

Dann gibt es $s_i \in R - \mathfrak{Q}$, sodass $s_i m_i = 0 \in M$

Betrachte
$$s = \prod_{i=1}^{r} s_i \in R - \mathfrak{Q}$$

Es gilt $s m_i = 0$ für alle i und damit $sM = 0$.
Also $s \in \operatorname{Ann} M$ und $\mathfrak{Q} \not\supset \operatorname{Ann} M$ und damit $\mathfrak{Q} \notin V(\operatorname{Ann} M)$.

Umgekehrt, angenommen $\mathfrak{Q} \notin V(\operatorname{Ann} M)$.
Dann ex. ein $s \in \operatorname{Ann} M - \mathfrak{Q}$ mit $sM = 0$, also $M_{\mathfrak{Q}} = 0$. $\square$

Der letzte Teil der Daten von $\operatorname{Spec} R$ ist die Zuordnung eines Ringes $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(U)$ für jede offene Menge $U \subset \operatorname{Spec} R$.
$$\{\text{offene Mengen}\} \longrightarrow \text{Ringe}, \quad U \mapsto \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(U)$$
Für eine Varietät $V \subset \mathbb{A}^n$ und $U \subset V$ offen
$$f \in \mathcal{O}_V(U) = \bigcap_{p \in U} \mathcal{O}_{V,p} \subset K(V).$$
war der Ring der rationalen Funktionen, die in allen Punkten $p \in U$ definiert sind.
$$f(p) \in K \cong \mathcal{O}_{V,p} / \mathfrak{m}_{V,p}$$
Da $R/\operatorname{rad}(0)$ nilpotente Elemente vergisst und
$$\operatorname{rad}(0) = \bigcap_{\mathfrak{Q} \in \operatorname{Spec} R} \mathfrak{Q}.$$
gilt, hat die Abbildung
$$R \to \coprod R/\mathfrak{Q}, \quad R \ni f \mapsto \{\mathfrak{Q} \mapsto f(\mathfrak{Q}) \in Q(R/\mathfrak{Q})\}$$
$\operatorname{rad}(0)$ als Kern.

Die richtige Definition von $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(U)$ ist die folgende
$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(U) = \{s : U \to \coprod_{\mathfrak{Q} \in U} R_{\mathfrak{Q}} \mid (1), (2)\}$$
(1) $s(\mathfrak{Q}) \in R_{\mathfrak{Q}}$

(2) s ist lokal ein uniformer Bruch, d.h. für alle $\mathfrak{Q} \in U$ ex $\mathfrak{Q} \in V \subset U$ offen und $r, f \in R$, sodass $f \notin \mathfrak{q}$ für alle $\mathfrak{q} \in V$ und
$$r/f = s(\mathfrak{q}) \in R_{\mathfrak{q}}$$
für alle $\mathfrak{q} \in V$

<u>Satz</u> $f \in R$, $D_f = D(f) = \operatorname{Spec} R - V(f)$

Dann gilt $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(D_f) = R_f$

Insbesondere gilt $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(\operatorname{Spec} R) = R$.

<u>Bem</u>: Die letzte Gleichung ist ein Analog zu $V \subset \mathbb{A}^n$ Varietät. $\bar{K}[V] = \bigcap_{p \in V} \mathcal{O}_{V,p} \subset \bar{K}(V)$.

Der zweite Teil ist ein Spezialfall von (1)-tem mit $f = 1$.

<u>Beweis</u>: Wir haben einen natürlichen Ringhomomorphismus $\psi : R_f \to \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(D_f)$, $\psi(a/f^n) = s : \left\{ \begin{array}{l} D_f \to \coprod R_{\mathfrak{q}} \\ \mathfrak{q} \mapsto a/f^n \end{array} \right.$

Wir zeigen zunächst, dass ψ injektiv ist.

Angenommen $\psi(a/f^n) = \psi(b/f^m)$. Dann gilt für jedes $\mathfrak{q} \in D_f$: $a/f^n = b/f^m \in R_{\mathfrak{q}}$

Also ex $h \in R - \mathfrak{q}$, sodass $h(af^m - bf^n) = 0 \in R$.

Sei $\mathfrak{a} = \operatorname{Ann}(af^m - bf^n)$.

Dann gilt $h \in \mathfrak{a}$ und $h \notin \mathfrak{q}$, also $\mathfrak{q} \not\supset \mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{q} \notin V(\mathfrak{a})$

Dies gilt für jedes $\mathfrak{q} \in D_f$, also $V(\mathfrak{a}) \cap D_f = \emptyset$.

Also $V(f) \supset V(\mathfrak{a})$.

$$\operatorname{rad}(f) = IV(f) \subset IV(\mathfrak{a}) = \operatorname{rad}(\mathfrak{a})$$

Also $f \in \operatorname{rad} \mathfrak{a}$.

Es gibt also eine Potenz f^N mit $f^N \in \mathfrak{a} = \operatorname{Ann}(af^m - bf^n)$

Somit $a/f^n = b/f^m \in R_f$.

Die schwere Richtung ist die Surjektivität.

Sei $s \in \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(D_f)$. Dann können wir nach Def. von $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(D_f)$ D_f mit offenen Mengen überdecken, sodass s auf V_i durch Brüche a_i/g_i repräsentiert wird mit $g_i \notin \mathfrak{q}$ für alle $\mathfrak{q} \in V_i$.

Da die offenen Mengen der Gestalt D_{h_i} eine Basis der Topologie von $\operatorname{Spec} R$ bilden, können wir $V_i = \bigcup D_{h_{ij}}$ und ohne Einschränkung $V_i = D(h_i)$ annehmen.

Da $D(h_i) \subset D(g_i)$ gilt $\operatorname{rad}(h_i) \subset \operatorname{rad}(g_i)$

Insbesondere gilt $h_i^n \in (g_i)$ für ein $n = n(i)$.
Also etwa $h_i^n = c\, g_i$ und so gilt

$$a_i/g_i = \frac{c\, a_i}{h_i^n}$$

Indem wir h_i durch h_i^n und a_i durch $c\, a_i$ ersetzen
$(D(h_i^n) = D(h_i))$ können wir annehmen, dass s auf
$D(h_i)$ durch a_i/h_i repräsentiert wird.
Da $D(g) = \bigcup D(h_i)$ folgt $V(g) \supset \bigcap_i V(h_i) = V(\sum_i (h_i))$
Also $g \in \mathrm{rad}(\sum(h_i))$
und damit $g^n \in \sum(h_i)$, was bedeutet $g^n = \sum_{i=1}^r b_i \cdot h_i$,
also $D(g^n) = D(g) \subset \bigcup_{i=1}^r D(h_i)$
Auf $D(h_i h_j) = D(h_i) \cap D(h_j)$ haben wir zwei Darstellungen
von s, nämlich a_i/h_i und a_j/h_j
Wegen der Injektivität von ψ auf $D(h_i h_j)$ heißt dies
dass ein n existiert mit

$$(h_i h_j)^n (h_j a_i - h_i a_j) = 0 \in R.$$

Da wir nur endlich viele Paare haben können wir n unab. von i und j wählen.
Indem wir die Gleichung

$$h_j^{n+1} (h_i^n a_i) - h_i^{n+1} (h_j^n a_j) = 0$$

und h_i durch h_i^{n+1} und a_i durch $a_i h_i^n$ ersetzen, erreichen wir, dass s auf $D(h_i)$ durch a_i/h_i repräsentiert u
und $h_j a_i - h_i a_j = 0 \in R$ gilt.
Nun schreiben wir

$$g^n = \sum_{i=1}^r b_i h_i$$

und rechnen nach, dass für $a = \sum_{i=1}^r a_i b_i$

$$h_j a = \sum_{i=1}^r h_j a_i b_i = \sum_{i=1}^r h_i a_j b_i = g^n a_j$$

gilt, also $a_j/h_j = a/g^n$ auf $D(h_j)$, somit ist s
das Bild von $a/g^n \in R_g$ $\square$

<u>Bem</u>: $(\mathrm{Spec}\, R, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, R})$ ist was man einen geringten Raum
= top Raum X zusammen mit Regeln für jede offene Menge
$U \subset X$, die den Garben-Axiomen entsprechen

Andere Beispiele für geringte Räume (M, C^∞)
M C^∞-Mannigfaltigkeit, $C^\infty(U) = \{f : U \to \mathbb{R},\ f\ C^\infty\}$
oder $(M, \mathcal{O})$, M komplexe Mfkt. $\mathcal{O}(U) = \{f : U \to \mathbb{C},\ f$ holomorph$\}$

<u>Def</u>: Sei R ein Ring. Eine Primidealkette in R ist eine Sequenz von strikten Inklusionen
$$\mathfrak{P}_0 \subsetneq \mathfrak{P}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{P}_l$$
von Primidealen. Dabei heißt l die Länge der Primidealkette. Die Krulldimension von R ist
$$\dim R = \{\sup l \mid \text{es ex Primidealkette der Länge } l\}$$

<u>Beispiel</u>:
(1) $R = K$ ein Körper, $\dim K = 0$, $(0) \subset K$ ist das einzige Primideal.
(2) $\dim K[X_1, \dots, X_n] \geq n$, da
$$0 \subset (X_1) \subset (X_1, X_2) \subset \dots \subset (X_1, \dots, X_n)$$
In der Tat gilt Gleichheit, was man mit Hilfe der verfeinerten Noethernormalisierung beweist.

<u>Bem</u>: Ist $\mathfrak{P}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{P}_l$ in einem Integritätsring R eine Primidealkette der Länge $l = \dim R$, dann ist klar, dass $\mathfrak{P}_l$ ein maximales Ideal von R ist und $\mathfrak{P}_0 = (0)$ gilt.
Die Idee des Dimensionsbegriffs ist: maximale Ideale entsprechen abgeschlossenen Punkten.
Submaximale $\mathfrak{P}_{l-1}$: 1-dim. Objekte
$$\dim \mathbb{Z} = 1, \quad (0) \subset (p)$$
$$\dim \overline{K}[t] = 1, \quad (0) \subset (t-a)$$

<u>Def und Satz</u>: $R \subset S$ eine Ringerweiterung, $I \subset R$ ein Ideal. Äquivalent sind:
(1) s genügt einer normierten Gleichung
$$s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = 0$$
mit $a_i \in I$

(2) $R[s] \subset S$ ist ein endlich erzeugter R-Modul und $s \in \mathrm{rad}(I\, R[s])$

(3) $s \in S' \subset S$, wobei S' ein Unterring ist, welcher als R-Modul endlich erzeugt ist und $s \in \mathrm{rad}(IS')$

Sind die Äquivalenten Bedingungen erfüllt, dann heißt s ganz über I bzw falls $I = R$, ganz über R

Bew: (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) klar

(3) $\Rightarrow$ (1) haben wir schon gesehen z.B. beim Bew des Nullstellensatzes. $\square$

$R \subset S$ heißt ganze Ringerweiterung, falls jedes $s \in S$ ganz über R ist.

Def: Sei $S = K[x_1, .., x_n]/I$ ein endlich erzeugte K-Algebra. Eine Noethernormalisierung besteht aus

(1) $y_1, .., y_d \in S$ die K-algebraisch unabh. sind.

(2) $K[y_1, .., y_d] \subset S$ ist eine ganze Ringerweiterung.

26.06.18 Thm: $R \subset S \subset T$ Ringerweiterung

Ist S ganz über R und T ganz über S, dann ist T ganz über R

Bem: S endl. erzeugte R-Algebra und $R \subset S$ ganz genau dann, wenn S ein endlich erzeugter R-Modul ist.

(3) $\Rightarrow$ (1) in Def, Satz

Angenommen S' wird als R-Modul von $m_1, .., m_r$ erzeugt und $s^d \in IS'$

$$s^d m_i = \sum_{j=1}^{r} b_{ij} m_j$$

für $b_{ij} \in I$. Damit $\det(s^d I - (b_{ij}))$ annuliert $S' \ni 1$ und damit $\det(s^d - (b_{ij})) = 0$.

Bew Thm: Sei $t \in T \supset S$. Dann ex $a_1, .., a_d \in S$ mit

$$t^d + a_1 t^{d-1} + \dots + a_d = 0$$

$S' = R[a_1, .., a_d] \subset S$ ganz und endlich erzeugt also ein endlicher R-Modul und t ist ganz über S'

Also $S'[t]$ ist endl. erzeugt als R-Modul, da $a_1^{\alpha_1} .. a_d^{\alpha_d} t^m$ mit $\alpha_i < n_i$, $m < d$ ein R-Modul bilden

Also t ganz über R $\square$